Universidad Nacional Autónoma de México

Dirección General de Incorporación y Revalidación de Estudios

Colegio de Ciencias y Humanidades

Guía de estudios: Matemáticas I

Clave de asignatura 1101

Guía de Matemáticas I.

La presente guía fue elaborada para apoyar a los alumnos que presentaran examen extraordinario de la materia de matemáticas I, tiene el objetivo de apoyar con un poco de teoría y con ejercicios prácticos, la preparación del alumno, con los cual consideramos, tendrán la capacidad de aprobar el examen correspondiente.

Coordinador
Ismael Nolasco Martínez

Primera versión: Septiembre de 2016.
Revisión: Mayo 2018.

Índice **Pág.**

Presentación

En respuesta a la actualización del programa de estudios, se acordó la elaboración de una nueva guía de estudios, que contemplé los cambios realizados en los contenidos temáticos y estructura de las unidades, sirviendo de apoyo para la preparación de los alumnos que presenten examen extraordinario de Matemáticas I.

El contenido de esta guía, pretende contribuir a que el alumno adquiera los aprendizajes, de manera autónoma y los profesores cuenten con un material de apoyo.

En su elaboración, se tomaron en cuenta materiales didácticos anteriores, experiencias docentes y materiales bibliográficos apropiados para su realización.

La estructura de la guía, presenta las siguientes características por unidad:

1. Contenido.
2. Propósitos de la Unidad.
3. Desarrollo de la Unidad.
4. Ejercicios Propuestos (con respuesta).
5. Propuesta de Evaluación (con respuesta).

En esta guía se resuelven problemas concretos, dando diferentes alternativas de solución, empleando el lenguaje matemático formal.

UNIDAD I

EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

Propósitos de la unidad

Al finalizar la unidad el alumnado será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Aprendizajes

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Comprenderá el significado de los números reales.
- Usará correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.
- Comparará dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.
- Operará correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.
- Operará correctamente con potencias y radicales con la misma base.
- Traducirá, relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.
- Resolverá problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.
- Reconocerá patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.

Unidad1. Significado de los números racionales

Clasificación de números y su simbolización

El siguiente diagrama muestra los distintos conjuntos de números, los cuales forman el conjunto de los **números reales denotados por el símbolo ℝ.**

- **Reales** (ℝ)
  - **Racionales**
    2, $\sqrt{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}$, -4,$3.\overline{12}$ …
    Su expansión decimal es finita, o infinita y periódica.
    Se simbolizan con la letra ℚ.
    - **Enteros**
      …, -2, -1, 0, 1, 2,…
      Se les representa con la letra ℤ.
      - **Naturales**
        1, 2, 3, 4, …
        Se les representa con la letra ℕ.
        - **La unidad:** 1
        - **Primos** Números divisibles* sólo entre sí mismos y la unidad.
        - **Compuestos** Los números que no son primos.
      - **Cero:** 0
      - **Negativos** …,-3, -2,-1
    - **Fraccionarios**
      $\frac{4}{7}, -\frac{1}{5}, 8.445, -1.2, \ldots$
  - **Irracionales**
    $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 1.518965340098, \ldots$
    Su expansión decimal es infinita y no periódica.
    Se simboliza con la letra 𝕀

Irracionales (note: original reads "Se simbolizan con la letra 𝕀")

**Un número entero es divisible entre otro entero si al efectuar la división, el cociente es entero y el residuo es cero.*

Como puede verse, los Enteros incluyen a los Naturales; los Racionales incluyen a los Enteros, y el conjunto de los números Reales contiene a los Racionales y a los Irracionales.

Los números reales son un conjunto **ordenado** y sus elementos pueden compararse entre sí. Es decir, si se eligen dos números reales distintos cualesquiera, siempre ocurrirá que uno es menor que el otro. Esto se simboliza de la siguiente manera:

Si *a es menor que b,* se escribe $a < b$.
Si *a* es *mayor que b,* se escribe $a > b$.

Los símbolos ≤ y ≥ denotan la idea de *desigualdad no estricta*:

El símbolo ≤ se lee "es menor o igual que", de manera que $7 \leq 9$ o $9 \leq 9$.
El símbolo ≥ se lee "es mayor o igual que", de manera que $9 \geq 7$ o $9 \geq 9$.

Ejercicios de clasificación

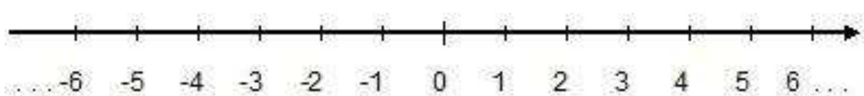
En la siguiente tabla indica la clasificación a la que pertenece cada uno de los números. Recuerda que pueden pertenecer a más de una clasificación de números.

Número	Clasificación
0	
2	
-6	
-20.5	
3.4	
$\sqrt{2}$	
π	

$-\sqrt{5}$	
$\frac{5}{8}$	
$-\frac{3}{4}$	
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	

Representación en la recta

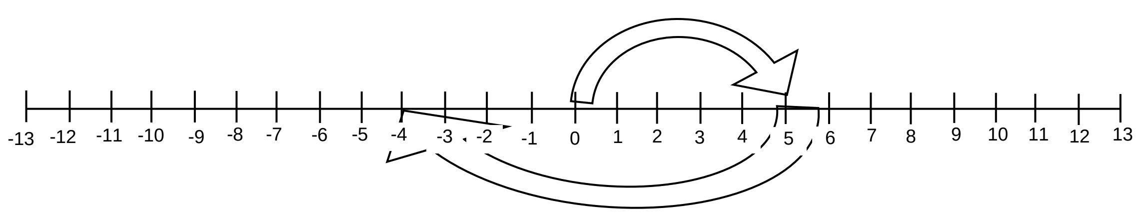
Los números reales se pueden ordenar: si tomamos dos distintos cualesquiera, siempre ocurrirá que uno es mayor que el otro. Gracias a este hecho se les puede representar en una recta numérica, como en la siguiente figura:



Obsérvese que dados dos números, por ejemplo el -1.5 y el 4.8, el menor se localiza siempre a la izquierda del mayor.

Ejemplo:

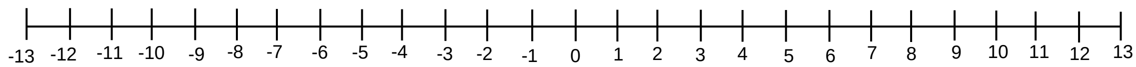
Representa en la recta la operación 5-9 y resuelve



Respuesta: -4

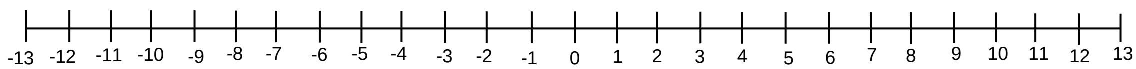
Resuelve en la recta:

a) 6 – 13 =



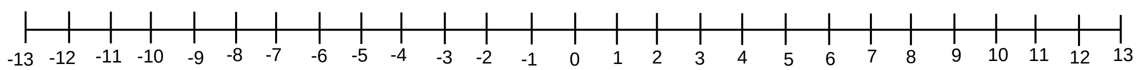
R= -7

b) 13 – 6 =



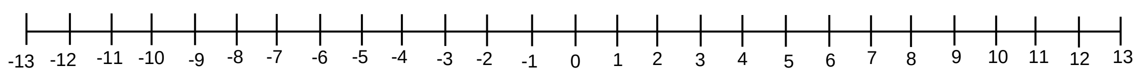
R= 7

c) –3 – 4 =



R=-7

d) 2 – (-3) =



R=5

Leyes de los signos

En la multiplicación y en la división, se aplican las conocidas leyes de los signos:

Multiplicación	División
$(+)\times(+)=+$	$(+)\div(+)=+$
$(+)\times(-)=-$	$(+)\div(-)=-$
$(-)\times(+)=-$	$(-)\div(+)=-$
$(-)\times(-)=+$	$(-)\div(-)=+$

De acuerdo con estas leyes, “más por más es más”, “menos por menos es más” “más entre más es más”, “menos entre menos es más” … Una manera de recordarlas con mayor eficiencia es considerar que el producto y división de signos iguales siempre dará “+”, mientras que si los signos son distintos se obtendrá “–“.

De esta manera, el producto de (−3)(−4) es +12.

Ejercicios. Toma en cuenta las leyes de los signos para efectuar las siguientes multiplicaciones sin emplear calculadora:

a) (4)(5)= R=20
b) (-4)(-5)= R=20
c) (-4)(5)(3)= R= -60
d) (-8)(6)= R= -48
e) (5)(7)= R=35
f) (-14)(5)(-3)= R=210
g) (-3)(-5)(2)(1)= R=30
h) (-3)(3)(-12)(-7)(-6)= R=4536

Las leyes de los signos también son válidas en la división. Considerando esto, efectúa cada una de las siguientes divisiones sin ayuda de calculadora:

i) (40) ÷ (5)= R=8
j) (24) ÷ (-5)= R= -4.8
k) (-16) ÷ (4)= R= -4
l) (8) ÷ (-4)= R= -2
m) (-4) ÷ (4)= R= -1
n) (-18) ÷ (6)= R= -3
o) (18) ÷ (-3)= R= -6
p) (-36) ÷ (12)= R= -3
q) (15) ÷ (1)= R=15
r) (-14) ÷ (-2)= R=7

Jerarquía de operaciones

¿Cuál es el resultado correcto de $5 + 4 \times 3$? ¿Es 27? ¿O es 17? Piénsalo un momento antes de continuar.

Cuando en una expresión aparecen muchas operaciones por realizar, éstas deben irse efectuando en un orden que es establecido por la llamada **jerarquía de las operaciones**.

De acuerdo con esta jerarquía:

1. Primero se resuelve lo que esté entre los signos de agrupación más internos (los signos de agrupación son los paréntesis, los corchetes y las llaves).
2. En segundo lugar se resuelven las potencias y raíces, si las hay.
3. En tercer lugar se efectúan las multiplicaciones y divisiones, si las hay.
4. Al final se resuelven las sumas y restas.
5. En caso de que se tenga una expresión con el mismo nivel jerárquico, se resuelve de izquierda a derecha.

Ejemplo: 20÷5×2 = 8

Tomando esto en cuenta, ¿cuál es el resultado correcto de $5 + 4 \times 3$?

Respuesta = 17

Ejercicios. Toma en cuenta las estrategias y reglas anteriores, y realiza las siguientes operaciones sin emplear calculadora.

-6+(-3)= R= -9
(-12)+ (-4)= R= -16
(-12) + (-4) + 25= R= 9
(-28) - (-4) + (8 -12)= R= -28
8 + 4 +(-8) + (-12)= R= -8
-2 + (-10 + 12)= R =0
-23 + 5 - (18 - 32)= R= -4

-3 – 5 + (-4) – (18 - 34)= R=4
i) (−8) +(−3)= R= -11
j) (−12) + (−7)= R= -19
k) (−4) + (−24) +25= R= -3
(−27) − (−5) +(9 −12)= R= -25

Ejercicios. Realiza lo que se pide, tomando en cuenta lo que has aprendido sobre jerarquía de las operaciones:

a) Coloca paréntesis en la expresión $5 + 6 \times 4 + 3$ de tal manera que el resultado sea 47.

b) Si se tienen 13 bolsas y en cada bolsa hay 7 peras y 11 manzanas, ¿cuántas frutas hay en total? ¿cuántas peras hay en total? ¿cuántas manzanas hay en total? R= 234 en total, 91 peras y 143 manzanas

c) Calcula:

   i. El producto de -13 por la suma de -11 más -4.
   R=195

   ii. La suma de 17 con el producto de -8 por 9.
   R= -55

   iii. El producto de -5 y 14 por la suma de 19 más -25.
   R= 420

   iv. (13)+(-78)+(189)+(-356)=
   R=-232

   v. (-23)(12)+(-3)(-6)=
   R= -258

Resuelve los siguientes problemas, empleando lo aprendido anteriormente:

1. Un comerciante hace una compra por \$1500, después recibe \$987 por ventas, paga a uno de sus proveedores \$350 y después recibe \$1000 que le debía un cliente. ¿Cuánto dinero tiene en caja?
   Solución: \$137

2. A las 6:00 am, un termómetro marca 4°C bajo cero, a las 11:00 am, la temperatura aumentó 13°C y para las 5 pm descendió 12°C ¿Cuál es la temperatura a las 5 pm?
   Solución: A las 5 pm la temperatura es de 3°C bajo cero.

3. Juan tiene una tarjeta de débito con saldo a favor de \$9876. Hizo tres compras y pagó con la tarjeta respectivamente, \$798, \$1690 y \$2300. Después depositó \$3000 a su cuenta. ¿Cuál es el saldo actual en la tarjeta?
   Solución: El saldo es de \$8088.

4. Al iniciar un día un comerciante tiene en caja \$1500.00. Realiza una compra de mercancía por \$1375.50, después recibe un pago por ventas de \$987.00, paga a uno de sus proveedores \$350.00 y por ultimo recibe \$930.00 que le debía un cliente. ¿Cuánto dinero tiene en caja?
   Solución: \$1691.5

5. Un tinaco de agua de 1200 litros se llena en 5 horas. Si el flujo de agua es constante, ¿Cuántos litros entran por minuto al tinaco? ¿Qué cantidad de agua habrá una hora y 45 minutos después de iniciar a llenarlo?
   Solución: 4 litros por minuto, 420 litros

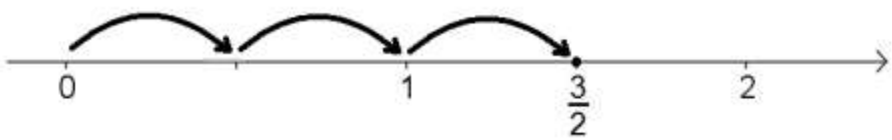
6. Escribiendo 3 páginas en una hora y trabajando 8 horas al día ¿Cuántos días se necesitan para escribir un libro de 912 páginas?
   Solución: 38 días

Números Racionales

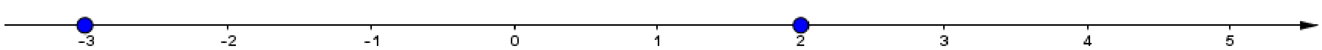
Los números racionales $\mathbb{Q}$ se definen como el conjunto de todas las fracciones posibles $\frac{p}{q}$, donde tanto *p* como *q* son números enteros con *q* distinto de cero. Esto se escribe así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

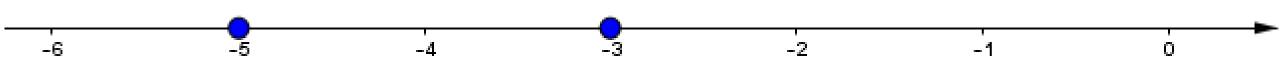
Para representar un número racional en la recta numérica, considera que en la fracción $\frac{p}{q}$, se está dividiendo la unidad en *q* partes iguales y de ellas se están tomando *p* partes. Por ejemplo, para ubicar la fracción $\frac{3}{2}$ hay que dividir la unidad en 2 partes, y luego avanzar desde el origen 3 veces la longitud de una de esas partes. La figura siguiente ilustra esta idea:



Para determinar cuál de dos números enteros es mayor sólo hay que considerar que el menor siempre es el que está más a la izquierda en la recta numérica. Por ejemplo, si tenemos los números enteros -3 y 2, y los representamos en la recta numérica, podemos observar que el -3 está a la izquierda del 2; por lo tanto, el -3 es menor que el 2; y se escribe -3 < 2.



Ahora veamos, qué pasaría si ambos números enteros fueran negativos, por ejemplo: -3 y -5; ahora la representación en la recta numérica sería la siguiente:



El -5, al estar a la izquierda del -3, es menor y se escribe -5 < -3.

Sin embargo, comparar números racionales no es tan sencillo. Por ejemplo, determinar si $\frac{9}{10}$ es mayor que $\frac{8}{9}$ requiere un análisis más detenido.

Para determinar cuál de las dos fracciones es mayor se emplea el siguiente criterio:

Dadas dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$, se comparan los productos cruzados ps y qr. Se tiene:

- Si $ps > qr$, entonces $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$.
- Si $ps = qr$, entonces $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.
- Si $ps < qr$, entonces $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$.

Aplicando este criterio en nuestra pareja $\frac{9}{10}$ y $\frac{8}{9}$, tendremos que $9 \times 9 = 81$, $10 \times 8 = 80$ y puesto que $81 > 80$, resulta que $\frac{9}{10} > \frac{8}{9}$.

Ahora bien, si las fracciones son negativas, es decir si tenemos $-\frac{9}{10}$ y $-\frac{8}{9}$, entonces resultará que $-9 \times 9 = -81$ y $10 \times (-8) = -80$, por lo que ahora sucede que $-81 < -80$ y entonces $-\frac{9}{10} < -\frac{8}{9}$.

Ejercicio 1
En las siguientes parejas de fracciones, determina qué fracción es la mayor.

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$

b) $-\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}$

c) $\frac{5}{7}, \frac{6}{8}$

d) $-\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}$

Representaciones de los números Racionales

Conversión de representación fraccionaria a representación decimal, y viceversa

De fracción a decimal

Encontrar la representación decimal de un número racional cuando se le tiene escrito en forma fraccionaria es muy sencillo; por ejemplo, si se quiere hallar la expresión decimal periódica que le corresponde a la fracción 7/13, únicamente es necesario efectuar la división 7 entre 13 y calcular el cociente hasta el número de decimales que se desee o hasta encontrar el periodo. Es fácil verificar que entonces: $\frac{7}{13} = 0.538461538461 \ldots = 0.\overline{538461}$.
Observa que esta expresión decimal tiene un periodo que consta de 6 cifras, que son 538461.

Ejercicio 2
Representa en forma decimal los siguientes números racionales (si fuera necesario, emplea hasta 8 posiciones de la expansión decimal).

a) $\frac{11}{7}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{22}{5}$

De decimal a fracción

Recordemos en primer lugar que la parte decimal de un número racional puede ser finita o infinita periódica.

Para escribir un número racional con expresión decimal finita en forma de fracción, se construye una fracción en la cual el numerador será dicho decimal sin el punto, y en el denominador se coloca un “1” seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga la cantidad decimal original. Si la fracción resultante se puede simplificar, se le simplifica.

Por ejemplo:

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$1.7 = \frac{17}{10}$$

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$3.02 = \frac{302}{100} = \frac{151}{50}$$

Si ahora se quiere escribir un número racional con expresión decimal infinita periódica en forma de fracción, podemos emplear un método poco formal que funciona en la mayoría de los casos, el cual se explica a continuación:
Considérese la fracción 0.123412341234… cuyo periodo consta de 4 cifras (este número se puede representar también como $0.\overline{1234}$; la barra indica que esas cifras se repiten indefinidamente una y otra vez).

En primer lugar, le asignamos una letra a este número:

$$x = 0.123412341234 \ldots \qquad (1)$$

Multiplicamos esta igualdad por un “1” seguido de tantos ceros como cifras tenga el periodo. En este caso, multiplicaremos por 10 000:

$10000x = 1234.12341234\ldots$ (2)

Ahora restamos (2) menos (1):

$$10000x - x = 1234.12341234\ldots - 0.12341234\ldots$$
$$9999x = 1234$$
$$x = \frac{1234}{9999}$$

Observa que toda la parte decimal se cancela al efectuar la sustracción.

Puede ocurrir una complicación si el número en su representación decimal presenta una parte no periódica.

Por ejemplo, consideremos el número $12.4525252\ldots = 12.4\overline{52}$, en el que la cifra 4 no forma parte del periodo de dos cifras.

En este caso, se sigue asignando una letra al número,

$a = 12.452525252\ldots$ (1)

y a continuación se multiplica la expresión por un “1” seguido de tantos ceros como lugares haya desde el punto decimal hasta el inicio del periodo. En este caso, se multiplicaría por 10:

$10a = 124.52525252\ldots$ (2)

Luego se multiplica la expresión original por un “1” seguido de tantos ceros como lugares haya desde el punto decimal hasta el final del periodo. En este caso se multiplicaría por 1000:

$1000a = 12452.52525252\ldots$ (3)

Y finalmente se restan (2) y (3):

$1000a - 10a = 12452.525252 - 124.525252$

$990a = 12328$

Se divide entre 990 ambos miembros de la última expresión, y queda:

$$a = \frac{12328}{990} = \frac{6164}{495}$$

Esta es la forma fraccionaria del número $12.4525252\ldots$

Toma en cuenta estas ideas para realizar los ejercicios siguientes:

Ejercicio 3.

Escribe los siguientes números racionales en forma de fracción. Simplifica siempre que sea posible.

a) 0.42
b) $1.0\overline{16}$
c) $3.\overline{23}$
d) 0.18
e) $0.\overline{13}$
f) $0.\overline{18}$
g) 0.383
h) $0.\overline{123}$
i) $0.6\overline{5}$
j) $0.\overline{236}$
k) $0.14\overline{36}$
l) $0.00\overline{54}$
m) $6.83\overline{15}$
n) $2.01\overline{42}$
ñ) $0.013\overline{694}$
o) $0.\overline{144}$
p) 0.007
q) $0.\overline{33}$

Ejercicio 4.

Escribe todos los decimales en forma de fracción, y luego efectúa las operaciones indicadas:

a) $0.6 + (2 + 0.5)$

b) $0.\overline{15} - 0.\overline{13}$

c) $0.\overline{12} - 0.0\overline{5} + 1.44 + 1.01$

d) $\left(\frac{0.\overline{81} - 0.\overline{22} + 0.66}{0.5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

e) $\dfrac{\frac{0.18}{0.6} + \frac{0.\overline{16}}{0.\overline{10}} - \frac{1}{16}}{0.00\overline{18}}$

f) $\frac{0.25}{0.45} + \frac{1}{8} + 0.\overline{156}$

Porcentaje

De representación fraccionaria a porcentual

Un porcentaje representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes iguales. También se le llama comúnmente tanto por ciento, donde por ciento significa “de cada cien unidades”.

Supongamos el número racional $\frac{3}{5}$, primero debes obtener su representación decimal; es decir: 0.6. El resultado obtenido se multiplica por 100 y así se tiene la representación porcentual del número racional: $0.6\,(100) = 60\%$; entonces $\frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$.

Ahora supongamos el número racional $\frac{1}{3}$, su representación decimal es $0.3333\ldots$; para obtener su representación porcentual, lo multiplicamos por 100 y tenemos $33.333\ldots\%$

Ejercicio 5.

Obtener la representación porcentual de los siguientes números racionales:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{120}{7}$

c) $\frac{7}{8}$

d) $\frac{11}{7}$

e) $\frac{8}{3}$

De representación porcentual a fraccionaria

Para obtener la representación fraccionaria de un porcentaje, solamente se debe dividir el porcentaje entre 100; supongamos el porcentaje 120%, para obtener su representación decimal se divide entre 100; es decir: $\frac{120}{100}$, finalmente se simplifica la fracción obteniendo: $\frac{6}{5}$.

Si el porcentaje tiene fracción decimal, en el denominador se agregan tantos ceros como decimales tenga el porcentaje; supongamos 22.5%, para obtener su representación decimal se divide entre 1000; es decir: $\frac{225}{1000}$, finalmente se simplifica la fracción obteniendo: $\frac{9}{40}$.

Ejercicio 6.

Obtener la representación fraccionaria de los siguientes porcentajes.

a) 25%

b) 110%

c) 45%

d) 13.6%

e) 530%

f) 8.25%

Razón geométrica

Una razón geométrica es una comparación de dos cantidades, a través de su cociente. Si la primera cantidad se representa por ***a*** y la segunda por ***b***, entonces la razón de a a b se representa como $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. A la cantidad ***a*** se le conoce como **antecedente** mientras que ***b*** es el **consecuente** de la razón.

Las siguientes son maneras equivalentes de representar la razón de a a b:

1. a/b 2. $\frac{a}{b}$ 3. $a:b$

Ejemplo

La edad de un padre es de 34 años y la de su hijo es de 10 años. La razón de edades del padre al hijo es 34 a 10, lo cual se puede expresar de las siguientes formas:

a) $34/10$
b) $\frac{34}{10}$
c) $34:10$

Proporción

Se dice que una proporción es la igualdad de dos razones**.** Si la razón $a:b$ es igual a la razón $c:d$, tenemos la proporción

$$a:b :: c:d$$

Que también se escribe

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y se lee "***a*** es a ***b,*** como ***c*** es a ***d***".

Propiedad fundamental de las proporciones

<u>En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios</u>. Esto es, si ***a*** y ***d*** son los extremos y *b* y ***c*** son los medios, entonces $\boldsymbol{ad} = \boldsymbol{bc}$, de donde se puede despejar cualquiera de los términos de la proporción. De esta manera, se tiene

$a = \frac{bc}{d}$ $d = \frac{bc}{a}$ $b = \frac{ad}{c}$ $c = \frac{ad}{b}$

Ejercicio 7.

Resuelve los siguientes problemas

1. Un estudiante recorre 145 km con 10 litros de gasolina. ¿Cuál es la razón de kilómetros por litro?

2. La luna recorre 1 500 000 millas en 27.3 días. Exprese esta razón en millas por hora y en millas por minuto.

3. Una receta para hacer pan de coco requiere 4 ¾ tazas de harina y 1 2/3 tazas de azúcar. ¿Cuál es la razón de harina a azúcar? ¿Cuál es la razón de azúcar a harina?

4. Tres placas de acero que tienen de espesor 0.726 pulgadas, 0.508 pulgadas y 0.631 pulgadas se van a ensamblar con remaches: ¿Cuál es el espesor combinado? ¿Cuál es el espesor promedio?

5. De un rollo de alambre de 27.635 pulgadas de longitud, se corta una pieza de 9.874 pulgadas. ¿Cuál es la longitud del alambre restante si se desperdiciaron 0.125 pulgadas al efectuar el corte?

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Ejercicio 1

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) $\frac{6}{8}$ d) $-\frac{5}{4}$

Ejercicio 2

a) $1.\overline{571428}$ b) 0.75 c) $1.\overline{6}$ d) 4.4

Ejercicio 3

a) $\frac{21}{50}$ b) $\frac{503}{495}$ c) $\frac{320}{99}$ d) $\frac{9}{50}$ e) $\frac{13}{99}$ f) $\frac{2}{11}$ g) $\frac{383}{1000}$ h) $\frac{41}{333}$ i) $\frac{59}{90}$ j) $\frac{236}{999}$ k) $\frac{79}{550}$
l) $\frac{3}{550}$ m) $\frac{5636}{825}$ n) $\frac{6647}{3300}$ ñ) $\frac{13681}{999000}$ o) $\frac{16}{111}$ p) $\frac{7}{1000}$ q) $\frac{1}{3}$

Ejercicio 4

a) $\frac{31}{10}$ b) $\frac{2}{99}$ c) $\frac{4981}{1980}$ d) $\frac{6217}{9900}$ e) $\frac{8085}{8}$ f) $\frac{743}{888}$

Ejercicio 5

a) 40% b) 1714.285714% c) 87.5% d) 157.1428571% e) 266.666…%

Ejercicio 6

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{11}{10}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{17}{125}$ e) $\frac{53}{10}$ f) $\frac{33}{400}$

Ejercicio 7

1) $\frac{145}{10}$ 2) $\frac{5000000}{91}$ 3) $\frac{20}{57}$ 4) 2.065 5) 17.636

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES.

TABLA DE OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Suma y resta con el mismo denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad donde\ \ b \neq 0$$

Suma y resta con diferente denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad donde\ \ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

Operando solo 2 fracciones.

Suma y resta con diferente denominador

igual

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f} = \frac{\blacksquare \pm \blacksquare \pm \blacksquare}{m.c.m\ de\ b, d\ y\ f} \qquad donde\ \ b \neq 0, d \neq 0\ y\ f\ \neq 0$$

por

entre

El m.c.m. puede ser el común denominador.

Producto

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \qquad donde\ \ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

División o cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc} \qquad donde\ \ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

$$O\ bien$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\ donde\ \ b \neq 0\ y\ c \neq 0$$

Operaciones básicas con números Racionales

Comencemos por recordar las operaciones aritméticas básicas para fracciones:

Adición y sustracción

Si se quiere sumar o restar dos o más fracciones que tienen el mismo denominador, solamente se suman los numeradores y se conserva el denominador:

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{5}=\frac{4+7}{5}=\frac{11}{5}$$

Si se quiere sumar o restar dos fracciones con denominador diferente, entonces se procede como se ejemplifica a continuación:
Para sumar $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$, existen dos maneras.

A. Se multiplican los denominadores para obtener el que será el denominador común. Luego se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y numerador de la segunda por el denominador de la primera; finalmente se suman o se restan (según sea el caso) los resultados:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2(6)+3(5)}{3(6)}=\frac{12+15}{18}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}$$

Si quisiéramos restar $\frac{2}{3}$ menos $\frac{5}{6}$, se haría:

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{2(6)-3(5)}{3(6)}=\frac{12-15}{18}=-\frac{3}{18}=-\frac{1}{6}$$

B. Otra manera es obtener el mcm de los denominadores, el cual será nuestro común denominador; luego este mcm se divide entre cada denominador original y el resultado se multiplica por el respectivo numerador:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4+5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

El mcm de 3 y 6 es 6. Luego, se divide 6 entre 3 y el resultado se multiplica por 2 (se obtiene 4). Se divide 6 entre 6 y el resultado se multiplica por 5 (se obtiene 5). Al efectuar la suma se obtiene $\frac{9}{6}$ que al simplificarse se convierte en $\frac{3}{2}$. Para el caso de la resta se procede de manera análoga.

Multiplicación

Si queremos multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{8}{7}$, simplemente se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}=\frac{3\times 8}{5\times 7}=\frac{24}{35}$$

División

Para dividir $\frac{7}{2}$ entre $\frac{9}{4}$ se puede proceder de dos maneras:

A. Se multiplica “cruzado”, numerador de la primera por denominador de la segunda y denominador de la primera por numerador de la segunda:

$$\frac{7}{2}\div\frac{9}{4}=\frac{7\times 4}{2\times 9}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}$$

B. Otra opción es representar la división en la forma siguiente:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4}}$$

y se multiplican los extremos (para obtener el numerador del cociente) y los medios (para obtener el denominador del cociente):

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{7\times 4}{2\times 9}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}$$

Serie de ejercicios 1

Resuelve las siguientes operaciones y simplifica el resultado a su mínima expresión.

1. $\frac{6}{5}+\frac{7}{5}=$ R= $\frac{13}{5}$	2. $\frac{3}{7}+\frac{11}{7}=$ R= 2
3. $\frac{4}{3}+\frac{8}{5}=$ R= $\frac{44}{15}$	4. $\frac{3}{8}+\frac{1}{7}=$ R= $\frac{29}{56}$
5. $\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=$ R= 1	6. $\frac{8}{3}-\frac{13}{3}=$ R= $-\frac{5}{3}$
7. $-\frac{2}{7}-\frac{3}{5}=$ R= $-\frac{31}{35}$	8. $\frac{9}{4}-\frac{15}{9}=$ R= $\frac{7}{12}$
9. $\frac{3}{7}+\frac{9}{8}+\frac{1}{3}=$ R= $\frac{317}{168}$	10. $\frac{7}{2}-\frac{5}{4}-\frac{2}{5}=$ R= $\frac{37}{20}$
11. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)=$ R= $\frac{7}{6}$	12. $\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{15}{3}\right)=$ R= $\frac{5}{3}$
13. $\left(\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)=$ R= $\frac{10}{9}$	14. $\left(-\frac{9}{4}\right)\div\left(-\frac{5}{3}\right)=$ R= $\frac{27}{20}$
15. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\div\left(7\frac{1}{2}+5\frac{1}{3}\right)=$ R= $\frac{27}{770}$	16. $\left(3\frac{1}{7}+3\frac{1}{8}\right)\left(7\frac{1}{2}-3\frac{1}{7}\right)=$ R= $\frac{21411}{784}$
17. $(7+6-13)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+12\right)=$ R=0	18. $\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{2}+5\left(\frac{1}{5}+3\right)\right]=$ R= $-\frac{97}{6}$
19. $5-\frac{3}{4}\left[-8+5\left(\frac{2}{3}-2\right)\right]=$ R= 16	20. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{3}\right]-\frac{\frac{2}{2}}{3\left(\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}\right)}=$ R= $-\frac{1}{6}$
21. $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)-\frac{\left[\frac{5}{4}+\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]}{-4+\frac{1}{2}-\frac{6}{7}}\right]=$ R= $\frac{310}{183}$	22. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=$ R= $\frac{8}{5}$

Serie de problemas A:

a) Un hombre está cubriendo un garaje de $15\frac{3}{4}$ m^2 de superficie y le faltan tres láminas que cubren $1\frac{1}{2}$ m^2 cada una. ¿Cuánta superficie tiene cubierta?
R = $11\frac{1}{4}$ m^2

b) Una familia distribuye sus ingresos anuales de la siguiente manera: $1/4$ parte en el alquiler de su vivienda, $2/5$ partes en alimentos y recreación, $1/10$ parte en ropa, ahorran $1/12$ parte y el resto lo emplean para viajar. ¿Qué parte del ingreso anual se utiliza para viajar? R= $\frac{1}{6}$

c) En el supermercado una señora pide 1 3/4 kg de salchicha; la vendedora pesa la cantidad en la balanza electrónica. ¿Qué cantidad decimal debe marcar la balanza? R= 1.75 kg

d) Rafael trabaja en una tienda de pinturas; hoy vendió 3 latas de 1/4 litro de pintura roja y 1 lata de medio litro de pintura azul. ¿Qué color de pintura vendió más? R= roja

Fracciones y porcentajes.

Un porcentaje se puede representar mediante una fracción común.
Por ejemplo:
50% se puede representar como $\frac{50}{100}=\frac{25}{50}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0.5$
75% se puede representar como $\frac{75}{100}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}=0.75$

Una vez determinado el porcentaje como fracción se puede comenzar a utilizar para resolver cualquier problema.

Serie de Ejercicios 2

Representa los siguientes porcentajes en forma de fracción común, simplificada a su mínima expresión:

a) 96% R= $\frac{24}{25}$

b) 50% R= $\frac{1}{2}$

c) 12% R= $\frac{3}{25}$

d) 25% R= $\frac{1}{4}$

e) 6% R= $\frac{3}{50}$

Ejemplo: Calcula el 35% de 5300.

Para calcular el porcentaje lo primero que se tiene que realizar es convertir a fracción común el porcentaje:

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

Una vez determinada la fracción, común o decimal, se multiplica el valor obtenido por la cantidad proporcionada, es decir :

$$5300\left(\frac{7}{20}\right) = \left(\frac{5300}{1}\right)\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{37100}{20} = \frac{3710}{2} = 1855$$

Por lo tanto, el 35% de 5300 es 1855.

Serie de problemas B

1.- ¿Cuál es el 16% de 62? R = 9.92

2.- Un pueblo tiene 40 000 habitantes, el 30% están casados, el 12 % son viudos y el resto son solteros. ¿Cuántos habitantes solteros hay en el pueblo? Solteros = 23200.

3.- Una camisa cuesta $145.50, tiene un descuento de 12% ¿Cuánto se paga por la camisa? R = $128.04

4.- Un tarjetahabiente tiene una deuda con el banco de $5840.00, hace un pago equivalente al 24% y lo que queda a deber tiene un 16% de recargos ¿Cuál será su deuda para el próximo mes? R = $5148.544

5.- Un prestamista cobra el 7% de interés mensual. Un hombre solicita la cantidad de $3450.00 para pagar en 3 meses ¿Cuál es el monto total de la deuda?
R = $4174.50

6.- El precio de lista de un automóvil es de $126,720.00. Se ofrece un descuento del 12% por pago de contado ¿Cuánto se paga si se hace de contado la compra?
R = $111,513.6

7.- El precio de un artículo aumentó el 10% este mes. Ahora cuesta $180.00. Calcular su precio en el mes anterior. R = 163.63

8.- Un pantalón que cuesta $300 tiene el 30% de descuento. ¿Cuánto hay que pagar por él? R= $210.00

9.- Un par de tenis que tenía el 15% de descuento costó $221. ¿Cuál era su precio original? R = $260

10.- Si el kg de caña de azúcar da el 12% de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar darán 3000 kg de caña de azúcar? R= 360 kg.

11.- El corazón humano pesa aproximadamente 25% de lo que pesa el hígado, si el hígado pesa 1500 gramos. ¿Cuánto pesa el corazón? R = 375 gr.

12.- El ornitorrinco es un mamífero que mide aproximadamente 75 centímetros de largo. La cola es el 15% de la longitud del animal. ¿Cuánto mide la cola? R = 11.25 cm.

13.- Tengo 50 años. La edad de mi hijo es el 40% de la mía. ¿Cuántos años tendré cuándo la edad de mi hijo sea el 50 % de la mía? R=60 años

14.- Dos piedras son extraídas de la mina, una pesa 1,550 gramos y tiene 25% de plata, la otra pesa 1320 gramos y tiene80% de plata. ¿Qué porcentaje de plata tiene la mezcla que se obtiene al juntarlas? R = 50.29%

15.- En un supermercado compro solo 2 artículos. El 59% del costo de un artículo es el 20 % del costo del segundo. Si por ambos pagué $84, ¿Cuál es el costo de cada uno de los artículos? R = uno vale $62.73 y el otro $21.27

16.- Durante una epidemia, un ganadero ve disminuida su rebaño que inicialmente contaba con 63,840 ovejas hasta 54,254 después de la enfermedad ¿Qué porcentaje de las ovejas sobrevivieron? R = 84.98%

17.- Adrián tiene una emergencia y necesita cambiar su cheque antes de que cierren el banco, por lo que acepta la proposición de cobrarlo con un cargo de 1.5%. Si el cheque es por un total de $3675 pesos, ¿cuánto recibirá al cambiarlo?
R= $ 3619.875

18.- Hace un año, una computadora costó $13,000.00, en este año cuesta $9,800.00 ¿Qué tanto por ciento se devaluó? R = 24.62%

19.- Una máquina que fabrica tornillos produce un 3% de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 51 tornillos defectuosos, ¿cuántas piezas ha fabricado la máquina?
R= 1,700 piezas

20.- Un hospital tiene 420 camas ocupadas, lo que representa el 84% del total. ¿De cuántas camas dispone el hospital? R = 500 camas

MINIMO COMUN MULTIPLO. (m.c.m)

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Numero	Múltiplos
3	2, 4, **6**, 8, 10,...
2	3, **6**, 9, 12,...

Por lo que el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6.

MAXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Numero	Divisores
12	1, 2, 3, 4, **6**, 12,...
18	1, 2, 3, **6**, 9,...

Determina el m.c.m de:

a) 12 y 18 R=36
b) 3, 4, y 5 R=60
c) 12 y 15 R=60
d) 12, 16 y 24 R=48
e) 32 y 48 R=96
f) 20, 24 y 30 R=120
g) 4,6 y 9 R=36
h) 3, 9 y 12 R=36
i) 12, 18 y 24 R=72
j) 30, 50 y 75 R=15

Determina el M.C.D. de:

a) 12 y 24 R=12
b) 12 y 18 R=6
c) 32 y 48 R=16
d) 12 y 15 R=3
e) 12 ,16 y 24 R = 4
f) 32, 40 y 64 R=8
g) 312, 216 y 120 R=24
h) 210, 315 y 420 R=105
i) 30, 45 y 60 R=15
j) 150, 375 y 450 R=75

Existen diversos métodos para hallar el MCD de dos o más números. A continuación se expone uno de ellos:

Supongamos que queremos obtener el MCD de 56 y de 104. Los colocamos en una tabla, y vamos dividiéndolos entre los números primos 2, 3, 5,.... hasta que obtengamos como resultado 1.

6A este proceso se le llama **descomposición en factores primos**:

Número:	Dividimos entre…	
56	2	(Sacamos mitad de 56 y da 28)
28	2	(Sacamos mitad de 28 y da 14)
14	2	(Sacamos mitad de 14 y da 7)
7	7	(7 no tiene mitad, ni tercera, ni cuarta ni quinta, ni sexta parte; le sacamos séptima
1		

Esto implica que 56 queda descompuesto como 2x2x2x7. Efectivamente , $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$. Ahora hacemos lo mismo con el 104:

Número:	Dividimos entre...	
104	2	(Sacamos mitad de 104 y da 52)
52	2	(Sacamos mitad de 52 y da 26)
26	2	(Sacamos mitad de 26 y da 13)
13	13	(13 no tiene mitad, ni tercera, ni cuarta, ni ninguna fracción hasta la treceava. Le sacamos treceava
1		

Así, 104 queda descompuesto como 2x2x2x13, es decir, $104 = 2 \times 2 \times 2 \times 13$.

Para terminar, se toman los factores que hayan aparecido en ambas descomposiciones y se les multiplica. En este caso sólo fue el 2: apareció tres veces en cada descomposición. Entonces el MCD de 56 y 104 es 2x2x2 = 8.

Este procedimiento funciona para cualquier conjunto de números: se les descompone en factores primos, se observan los factores que aparezcan en todas las descomposiciones, y se les multiplica. El resultado de esa multiplicación es el **MCD**.

El **mcm** se puede calcular utilizando la descomposición en factores primos que se estudió en la sección anterior.
Por ejemplo, para encontrar el mcm de 8, 12 y 22, los colocamos en una tabla y los descomponemos en factores primos:

	Números:		Dividimos entre...
8	**12**	**22**	2
4	6	11	2
2	3	11	2
1	3	11	3
	1	11	11
		1	

A continuación se multiplican los divisores encontrados: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 264$. De este modo, el **mcm** de 8,12 y 22 es 264.

Serie de problemas C.

1. Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres coinciden. ¿Cuántas veces volverán a coincidir en los 5 minutos siguientes?

R: 1 vez, coinciden a las 6:33

2. Cuatro ciclistas compiten en una pista circular y la recorren totalmente en 8, 10, 12 y 15 minutos respectivamente. Si parten juntos, ¿en cuántos minutos se encontrarán de nuevo?

R: Se volverán a encontrar a los 120 min.

3. Encontrar el menor número de dulces necesarios para repartir entre tres grupos de alumnos. Un grupo de 20, otro de 25 y otro de 30, de modo que cada alumno reciba un número exacto de dulces. ¿Cuántos dulces recibirá cada alumno?

R: 300 dulces; cada alumno recibirá 4 dulces.

4. Se quiere abastecer de agua a un poblado. Para esto se cuenta con tanques de agua de las siguientes capacidades: 250 lts., 360 lts. y 540 lts. El contenido de éstos se requiere envasar en cierto número de garrafas iguales. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueda envasar el agua contenida en cada uno de los tanques y el número de garrafas que se necesitan.

R: se necesitan 115 garrafas, su contenido máximo será de 10 litros.

5. Un comerciante desea poner en cajas 12,028 manzanas y 12,772 naranjas, de modo que cada caja contenga el mismo número de manzanas o de naranjas y, además, el mayor número posible. Hallar el número de naranjas de cada caja y el número de cajas necesarias.

R:Se necesitan 200 cajas, 97 de manzanas y 103 de naranjas, con 124 frutas

6. Un ebanista quiere cortar una plancha de madera que mide 256cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grande posible.
   a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
   b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

R: 32cm, 24 cuadrados.

7. Un viajante va a Sevilla cada 18 días, otro va a Sevilla cada 15 días y un tercero va a Sevilla cada 8 días. Hoy 10 de enero han coincidido en Sevilla los tres viajantes. ¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Sevilla?

R: 360 días

8. Vanesa está construyendo una maqueta y dispone de tres listones de 180, 250 y 300 cm de largo respectivamente. Para hacer la base de una casa desea cortar los tres listones en trozos de igual tamaño, sin que sobre nada. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trocito para que el número de cortes sea el menor posible? ¿Cuántos trozos de ese tamaño saldrán de cada listón?

R: 10 cm cada trozo, 18, 25 y 30 trozos respectivamente

9. En el colegio hay dos actividades complementarias: un grupo de teatro que se reúne cada 4 días para ensayar y un equipo que elabora una revista se reúne cada 5 días. ¿A los cuantos días coincidirán los dos grupos? Si el día 30 de octubre coinciden ambos grupos. ¿Cuándo volverán a coincidir?

R:Cada 20 dias, el 19 de noviembre

10. Se desea repartir 180 libros, 240 juguetes y 300 chocolatines. ¿Entre cuántos niños debe hacerse la repartición para que se cumplan simultáneamente las tres condiciones siguientes?:
    - Cada niño deberá recibir la mayor cantidad posible de libros, la mayor posible de juguetes y la mayor posible de chocolatines.
    - Libros, juguetes y chocolatines se deberán repartir equitativamente.
    - No deben sobrar libros, juguetes ni chocolatines.

R: Entre 60 niños, cada niño deberá recibir 3 libros, 4 juguetes y 5 chocolatines.

11. Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 pensamientos, 360 jacintos y 480 claveles en el menor número posible de canteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. ¿Qué cantidad de plantas debe contener cada cantero y cuántos hay?

R: Se necesitan 15 canteros con 120 plantas cada uno; 6 canteros con violetas, 2 con pensamientos, 3 con jacintos y 4 con claveles.

12. Un Señor tiene dos pedazos de varilla de 36 m. y 48 m. que necesita dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

R: 12 cm

LEYES DE LOS EXPONENTES

$$x^0 = 1, (x \neq 0) \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, (x \neq 0)$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

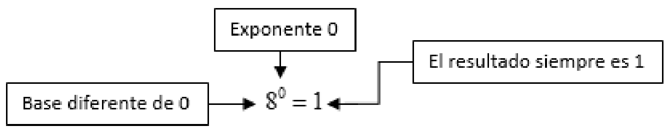
$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

$\boxed{x^0 = 1, (x \neq 0)}$

Ejemplos:

a) $8^0 = 1$



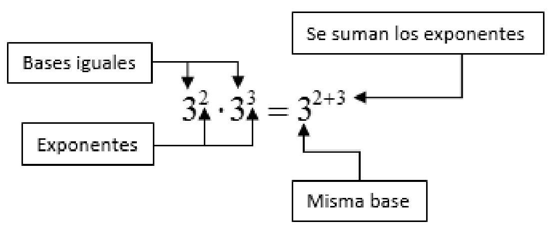
b) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

c) $(-67)^0 = 1$

$\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m}}$

Ejemplos:

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$



b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

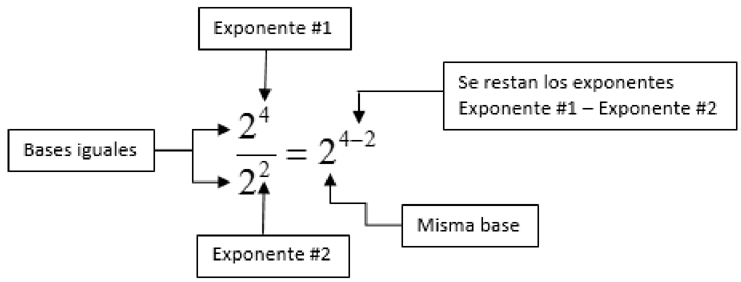
c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

d) $7^{-4} \cdot 7^5 = 7^{-4+5} = 7$

$$\boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$$

Ejemplos:

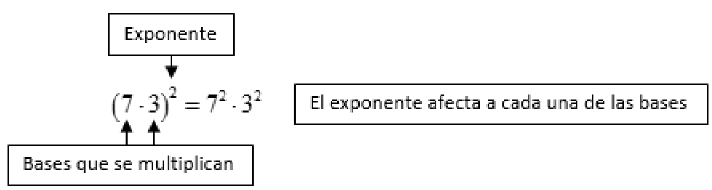
a) $\dfrac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2$



b) $\dfrac{3^6}{3^3} = 3^{6-3} = 3^3$

c) $\dfrac{4^7}{4^9} = 4^{7-9} = 4^{-2}$

$$\boxed{(xy)^n = x^n y^n}$$



Ejemplos:

a) $(7\cdot 3)^2 = 7^2\cdot 3^2$

b) $(4\cdot 2)^3 = 4^3\cdot 2^3$

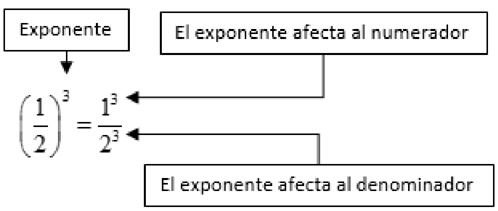
c) $(13\cdot 2)^{-2} = 13^{-2}\cdot 2^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{7}{3}\right)^3$

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3}$



b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$

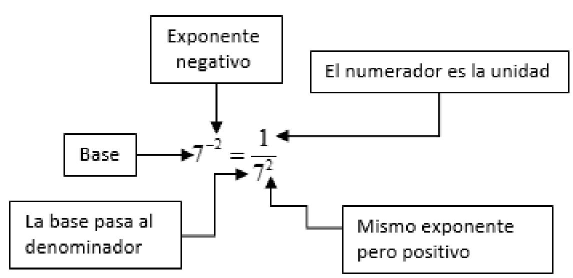
c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{3^{-1}}{2^{-1}}$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}}$

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}, (x \neq 0)}$$

Ejemplos:

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$



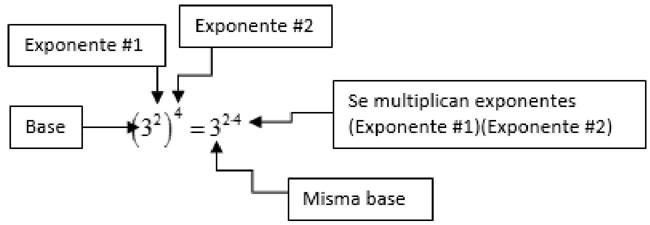
b) $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

c) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\left(x^{n}\right)^{m} = x^{n\cdot m}}$$

Ejemplos:

a) $\left(3^{2}\right)^{4} = 3^{2\cdot 4} = 3^{8}$



b) $\left(5^{3}\right)^{4} = 5^{4\cdot 3} = 5^{12}$

c) $\left(2^{-3}\right)^{2} = 2^{-3\cdot 2} = 2^{-6}$

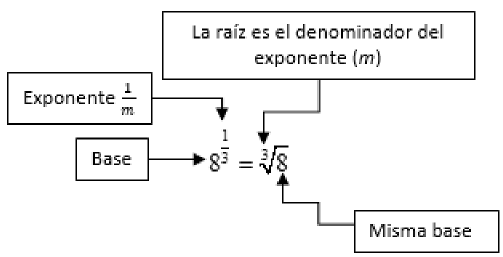
d) $\left(7^{-2}\right)^{-1} = 7^{-2(-1)} = 7^{2}$

e) $\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{4} = 8^{\left(\frac{1}{2}\right)(4)} = 8^{2}$

$$\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$$

Ejemplos:

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

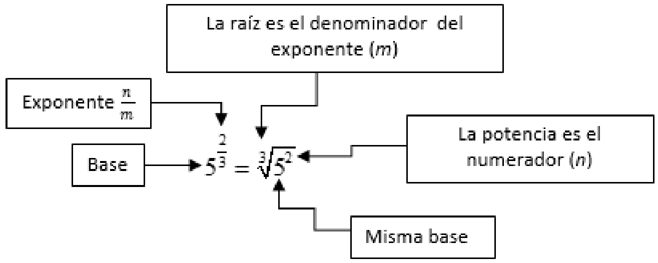


b) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

d) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

$$\boxed{x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}}$$



Ejemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

b) $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

c) $80^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{80^2}$

Problemas resueltos.

Utiliza las leyes de los exponentes para demostrar que las siguientes igualdades son ciertas.

1) $8^{\frac{2}{3}}\left(4^{-3}\right) = \dfrac{1}{16}$

$8^{\frac{2}{3}}\left(4^{-3}\right) =$ Aplicando $\boxed{x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}}$

$\sqrt[3]{8^2}\left(4^{-3}\right) =$ Aplicando $\boxed{x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \left(x \neq 0\right)}$

$\sqrt[3]{8^2}\left(\dfrac{1}{4^3}\right) = \sqrt[3]{64}\left(\dfrac{1}{4^3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{4^3}\right) = \dfrac{4}{4^3} =$ Aplicando $\boxed{\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$

$4^{1-3} = 4^{-2} =$ Aplicando $\boxed{x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \left(x \neq 0\right)}$

$\dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

2) $\left(\left(\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{2}\right)^{-2}=\dfrac{9}{7}$

$\left(\left(\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{2}\right)^{-2}=$ Aplicando $\boxed{\left(x^{n}\right)^{m}=x^{n\cdot m}}$

$\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)(2)(-2)}=\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\left(-\frac{4}{4}\right)}=\left(\dfrac{7}{9}\right)^{-1}$ Aplicando $\boxed{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n}=\dfrac{x^{n}}{y^{n}}}$

$\dfrac{7^{-1}}{9^{-1}}=$ Aplicando $\boxed{x^{-n}=\dfrac{1}{x^{n}},\left(x\neq 0\right)}$

$\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{7}$

Serie de ejercicios 2

1) $\dfrac{\left(-1\right)^{5}(3^{5})}{3^{3}(-1)^{4}}=-9$

2) $\sqrt[4]{2^{4}\cdot 3^{4}}=6$

3) $\left(\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

4) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{9}{25}}\right)^{2}=\dfrac{3}{5}$

5) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{2}=1$

6) $\left(\left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^{15}\left(\dfrac{6}{5}\right)^{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{36}{25}$

7) $3^{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\left(\left(-32\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-1}=-18$

8) $\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}}=8$

SERIES Y SUCESIONES

Una sucesión infinita o simplemente sucesión es una función cuyo dominio está constituido por el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido, que es un subconjunto de los números reales, se expresa en un listado como sigue:

f(1), f(2), f(3), ..., f(n),...

<u>Definición</u>

Es una lista de números que sigue una regla determinada

$\{a_n\}=\{a_1, a_2, a_{3,...,} a_n\}$

Formalmente las sucesiones se definen como una función de n cuyo dominio son los números naturales N.

$\{a_n\}$: N->R

Por ejemplo:

1) $\{a_n\}=\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
2) $\{a_n\}=\{0.5, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, \ldots\}$
3) $\{a_n\}=\{1, -1, 1, -1, 1, ...\}$
4) $\{a_n\}=\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$

El término i-ésimo a_i de una sucesión es el que está en el lugar i. Por ejemplo, en la primera sucesión el primer término $a_1=2$, el segundo término a_2 es 4, el tercer término a_3 es 6. El término enésimo o general es a_n.

De los ejemplos anteriores el enésimo término es:

1) $a_n = 2n$
2) $a_n = 0.5n$
3) $a_n = (-1)^{n-1}$
4) $a_n = 2^{n-1}$

Una sucesión puede ser finita o infinita:

Se dice que una sucesión es *infinita* cuando tiene un número infinito de términos.

Ejemplo: $\{a_n\}=\{1, 6, 11,16, 21, ...$

Una sucesión es *finita* cuando tiene un número determinado de términos.

Ejemplo: $\{a_n\}=$ ..., 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

Progresiones

Es toda sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene sumándole al término anterior una constante llamada razón o diferencia.

Progresión geométrica

Es toda sucesión de términos en la cual cada término después del primero se obtiene multiplicando al termino anterior con una constante llamada razón.

Serie de ejercicios 1

Escribe los siguientes tres términos de cada sucesión y una expresión algebraica que describa cada elemento.

a) 6, 12, 18, … b) 4, 10, 16, … c) 5, 10, 15, …

d) 2, 7, 12, … e) 4, 7, 10, … f) 1, 8, 27, …

g) 3, 8, 13, … h) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$

j) $\frac{5}{2}, \frac{9}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ k) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$ l) $3, 4, \frac{13}{3}, \ldots$

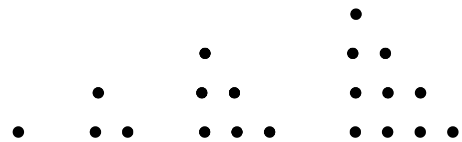
NOTA: $4 = \frac{8}{2}$

m) 9, 8, 7,… n) 10, 8, 6,… ñ) 5, 3, 1,…

Serie de ejercicios 2

Completa las siguientes series:

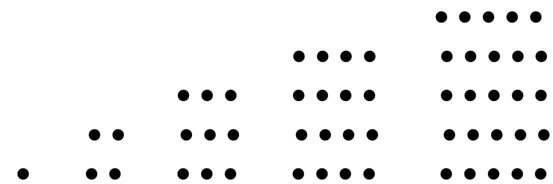
LOS NÚMEROS TRIANGULARES



1 3 6 10

¿CUÁLES SON LOS SIGUIENTES CUATRO NÚMEROS TRIANGULARES DE LA SERIE?

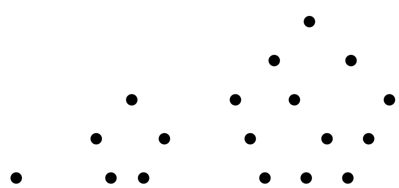
LOS NÚMEROS CUADRADOS



1 4 9 16 25

¿CUÁLES SON LOS SIGUIENTES CUATRO NÚMEROS CUADRADOS DE LA SERIE?

NÚMEROS PENTAGONALES



1 5 12 22

¿CUÁLES SON LOS SIGUIENTES CUATRO NÚMEROS PENTAGONALES?

COMPLETA LA TABLA

TRIANGULARES	1	3	6	10	15	__
CUADRADOS	1	4	9	16	25	__
PENTAGONALES	1	5	12	22	35	__
HEXAGONALES	1	6	15	__	__	__
HEPTAGONALES	1	_	__	__	__	__
OCTAGONALES	_	_	__	__	__	__
NONAGONALES	_	_	__	__	__	__
DECAGONALES	_	_	__	__	__	__

3.- En la sucesión 302153021530215302 15… ¿Qué dígito ocupa el lugar 2010?

4.- En la sucesión 1, 3, 5, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 4, 6, 8, … ¿Qué número ocupa el lugar 2010?

5.- ¿Cuál es el resultado de sumar 1 + 2 + 3 + 4 + … + 97 + 98 + 99 + 100?

Esto resulta ser muy cansado y tedioso si se resuelve sumando número por número pero por suerte hay otra forma más rápida para resolverlo. Si sumas por parejas 1 + 100 = _____ ; 2 + 99 = _____ ; 3 + 98 = _____ ; etc. y notas que se forman 50 parejas, la suma total sería 50 (_____) = _______

6.- ¿Cuál es el resultado de sumar 2010 + 2009 + 2008 + … + 4 + 3 + 2 + 1?

7.- ¿Cuál es el resultado de sumar 1 + 2 + 3 + … + 245 + 246 + 247?

8.- ¿Cuál es el resultado de sumar 2010 + 2008 + 2006 + … + 6 + 4 + 2?

9.- ¿Cuál es el resultado de sumar 11 + 13 + 15 + … + 99 + 101 + 103?

RESPUESTAS DE LA SERIE 1:

a) 6n
b) 6n-2
c) 5n
d) 5n-3
e) 3n+1
f) n^3
g) 5n-2
h) n/(n+1)
i) (2n-1)/2n
j) (4n+1)/(3n-1)
k) (2n-1)/n
l) (5n-2)/n
m) 10-n
n) 12-2n
ñ) 6-(2n-1)

Respuestas de la serie 2

Los números triangulares son: 15, 21, 28, 31.
Los números cuadrados son: 36, 49, 64, 81.
Los números pentagonales son: 35, 51, 70, 91.

TRIANGULARES	1	3	6	10	15	21
CUADRADOS	1	4	9	16	25	36
PENTAGONALES	1	5	12	22	35	51
HEXAGONALES	1	6	15	28	40	66
HEPTAGONALES	1	7	18	34	45	81
OCTAGONALES	1	8	21	40	50	96
NONAGONALES	1	9	24	46	55	111
DECAGONALES	1	10	27	52	60	126

UNIDAD II

VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

Propósito de la unidad

Al finalizar la unidad el alumnado modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Aprendizajes

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Identificará situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.
- Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identificará los elementos que corresponden a los conceptos de variable dependiente e independiente, la razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.
- El alumno será capaz de traducir en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
- El alumno será capaz de traducir en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usará esta representación para obtener información sobre la variación
- El alumno será capaz de representar algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.
- El alumno será capaz de identificar entre una serie de variaciones entre dos variables aquellas que correspondan al concepto de función lineal.
- El alumno será capaz de modelar con la expresión $y = mx+b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial $(0, b)$. Transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.
- Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno será capaz de calcular estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.

VARIABLES Y CONSTANTES.

Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son constantes cuando tienen un valor fijo y determinado y son variables cuando toman diversos valores. Por ejemplo:

1) Si un metro de tela cuesta $20, el costo de una pieza de tela dependerá del número de metros que tenga la pieza. Si la pieza tiene 5 metros, el costo de la pieza será de $100; si tiene 8 metros, el costo será $160, etc. Aquí el costo de un metro que siempre es el mismo, $20, es una constante, y el número de metros de la pieza y el costo de la pieza, que toman diversos valores, son variables.

2) Si un móvil desarrolla una velocidad de 6 metros por segundo, el espacio que recorra dependerá del tiempo que esté andando. Si anda durante 2 segundos, recorrerá un espacio de 12 m; si anda durante 3 segundos, recorrerá un espacio de 18 m. Aquí, la velocidad 6 m es constante y el tiempo y el espacio recorrido, que toman diferentes valores, son variables.

En base a lo anterior podríamos dar la siguiente definición:

Un símbolo que representa un valor fijo se llama una constante; un símbolo que puede representar diversos valores se llama una variable.

Ejemplo, consideremos la fórmula $C=2\pi r$, que nos da la longitud de la circunferencia C de radio r. en esta expresión C y r pueden tomar diversos valores (relacionados entre sí) y, por tanto, son variables, pero las cantidades 2 y π que tienen siempre el mismo valor, son constantes.
Hay dos tipos de constantes; absolutas y parámetros. Una constante absoluta es aquella que en todos los problemas tiene siempre el mismo valor. Por ejemplo, 2 y π son constantes absolutas.

Un parámetro es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada, pero que puede tener un valor diferente en otro problema o situación.
Por ejemplo, en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, x puede tomar diferentes valores, pero a, b y c son constantes para cada caso. Así en $5x^2 + 6x + 8$, a=5, b=6 y c=8; en $-4x^2 + x - 2$, a=-4,b=1 y c=-2. Luego a, b, c son parámetros.

Veamos la siguiente situación:

Los elementos del modelo matemático: regla de correspondencia, dominio y rango.

Los nutriólogos consideran que el cálculo de la energía en una persona depende principalmente de cuatro factores:

- Edad de la persona
- Estatura
- Masa
- Nivel de actividad

Estos cuatro factores cambian para cada persona, razón por la cual podemos decir que la cantidad de energía que necesita depende de cuatro variables.

Observa que al igual que los factores mencionados, la cantidad de energía cambia para cada persona, por lo que también es una *variable*; por ello, tenemos que establecer un criterio para distinguirlas.

La *variable independiente* simboliza, un dato que proporcionamos y nos permite determinar o calcular la magnitud de otro, que se llama *variable dependiente*.

En nuestro caso, tenemos cuatro variables independientes, y de ellas dependerá la cantidad de energía que requiera una persona, de manera que esta última es la variable dependiente. Si quisiéramos relacionar a las variables independientes con la variable dependiente, lo haríamos mediante una *regla de correspondencia*, que podría ser una ecuación o fórmula

El Comité para la Alimentación y la Nutrición del Instituto de Medicina de Estados Unidos, ha determinado un **modelo matemático** que permite calcular los requerimientos energéticos diarios de una persona en kilocalorías por día, dependiendo de la edad (en años), la masa (en kilogramos), la estatura (en metros) y el nivel de actividad de una persona. Sin embargo si utilizáramos todas esas variables y quisiéramos representarlas gráficamente necesitaríamos cinco ejes.

Pero como las gráficas son grandes auxiliares para comunicar información sin involucrar expresiones algebraicas, podemos hacer algunos ajustes para usar el plano cartesiano, que nos es más familiar.

Si fijáramos el valor de tres parámetros (edad, estatura y nivel de actividad) para que dejen de ser variables y se conviertan en *constantes*, así lograríamos que nuestra ecuación sólo tenga **dos variables**: una dependiente –los requerimientos energéticos o REE– y una independiente, que en nuestro caso será el peso (p). De tal manera podríamos establecer un modelo que sirviera para los hombres de 30 años, de 1.80 metros de estatura, y con el mismo nivel de actividad física, y para esa población específica sólo enfocarnos en el peso, para saber los requerimientos energéticos.

Razón

La información cuantitativa de muchas cosas, puede ser expresada, ya sea en valores reales o valores relativos, para propósitos de comparación. Por ejemplo, si hay 5,000 estudiantes en una universidad, incluyendo 1,000 mujeres y 4,000 muchachos, la comparación entre el número de muchachas y el número de muchachos, puede hacerse en dos formas: 1)1,000 muchachas a 4,000 muchachos (valores reales), y 2) 1 muchacha por 4 muchachos (valores relativos).
La expresión de valores relativos de varias cosas es llamada razón. Así, la última comparación puede establecerse: "La razón del número de muchachas al de muchachos en la universidad es 1 a 4", la cual puede ser escrita 1:4, y significa que por cada muchacha hay 4 muchachos.

En general, la razón del primer término (el número mencionado primero en el enunciado) al segundo término es el cociente del primer término dividido por el segundo término.

Razón del primer término al segundo = $\frac{el\ primer\ término}{el\ segundo\ término}$

Así, la razón de a a b es expresada como $a/_b$, o a:b. La razón de b a a es expresada como b/a, o $b{:}a$.

La razón del número de muchachos al de muchachas, en el ejemplo de arriba es $\frac{4000}{1000}=\frac{4}{1}$, o 4:1 o simplemente 4. Cuando la división indicada por una fracción que representa una razón, es llevada a cabo, el cociente entonces representa el valor del primer término, y el valor del segundo término se considera siempre que es 1. Así. $\frac{4}{1}$ = 4 tiene el mismo significado que 4:1; $\frac{3}{5}$ =0.6 es equivalente a 0.6 a 1.
Debido a que una razón puede ser expresada como una fracción, las reglas que se aplican a fracciones del mismo modo se aplican a razones. Por ejemplo, una fracción es usualmente cambiada a su equivalente fracción irreducible en una respuesta final. Así, $\frac{10}{20}$ puede ser cambiada a ½ , y la razón de 10 a 20 es igual a la razón de 1 a 2, o 10:20 = 1:2.

Razón de cambio

Supongamos que tengo una cantidad de dinero en mi alcancía, y voy incrementando cada mes esa cantidad. Las cantidades respectivas de dinero en mi alcancía conforme transcurren los meses, se muestran en la siguiente tabla:

Cantidad	250 (inicial)	275	300	325	350	375	400	425
Tiempo	Enero (0 meses)	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	agosto

De la cantidad inicial de 250 a 275, vemos que en el transcurso de un mes se incrementó $25 (275-250); en el siguiente mes la cantidad se incrementó otros $25. Supongamos que alguien revisó la cantidad de la alcancía cuando era de $275 (en febrero) y después volvió a revisar en mayo y vio que era de $350; el incremento de la cantidad de febrero a mayo es de 350-275=75, y el periodo transcurrido fue de 3 meses, por lo que en promedio se incrementó 75/3 = 25 pesos cada mes. Supongamos que alguien supo que la cantidad inicial era de $250 y cuando se rompió la alcancía en agosto vio que había $425; si quiere saber cuánto se depositaba en promedio cada mes, para llegar a esa cantidad, el incremento de la cantidad de dinero que es 425-250= 175 lo tendría que dividir entre el número de meses transcurridos, que en nuestro caso es de 7 (desde el primer mes que es enero, hasta el octavo mes que es agosto, 8-1=7).

Por lo que el incremento de la cantidad, entre el periodo en que ocurrió ese incremento es 175/7 = 25. Observamos que no importa el intervalo de tiempo que tomemos, si el incremento de la cantidad de dinero cada mes fue constante, el incremento de la cantidad entre el incremento en el tiempo, siempre es el mismo valor, $25. Como la cantidad de dinero en la alcancía depende del número de meses transcurridos, es decir del tiempo, la cantidad de dinero es la variable dependiente, y el tiempo es la variable independiente, por lo que podríamos decir que:

El cambio de la cantidad de dinero = $\frac{variación\ de\ la\ variable\ dependiente}{variación\ de\ la\ variable\ independiente}$

Como ese cambio en la cantidad de dinero se obtuvo a partir de un cociente, y ya vimos que una razón es un cociente, decimos que es una razón de cambio.
Cuando dos conjuntos de cantidades están relacionadas entre sí, se puede estudiar el cambio o incremento de una cantidad respecto al cambio o incremento de otra. Por ejemplo, la distancia recorrida de un vehículo, está relacionada de manera directa con la cantidad de combustible consumido. Al cociente que se obtiene al dividir el incremento o decremento de una cantidad entre el incremento o decremento correspondiente a la otra, se le llama **razón de cambio**.

Variación directa proporcional

En la ciencia y en situaciones de la vida cotidiana, muchas de las leyes y modelos matemáticos que se aplican para resolver o realizar cálculos, son variaciones directas.

Por ejemplo, la fuerza aplicada a un cuerpo es directamente proporcional a su masa. Esto significa que si la masa aumenta, la fuerza aumentará en la misma proporción, y si la masa disminuye, la fuerza disminuirá en la misma proporción. La expresión matemática que representa este hecho es

$$F = rm$$

A partir de esta expresión se puede obtener la razón entre la fuerza y la masa, $r = \frac{F}{m}$. En una variación directamente proporcional el valor de r es constante, por lo que en lugar de r suele escribirse $\boldsymbol{k}$ (constante de proporcionalidad). Así, $F = rm$ se reescribe como

$$\boldsymbol{F = km.}$$

En general, se dice que una variable y es directamente proporcional a otra variable x si se les puede relacionar a través de una expresión de la forma

$$y = kx$$

Donde k es una constante diferente de cero llamada "constante de proporcionalidad".

En una expresión de este tipo, y se conoce como "variable dependiente", mientras que x recibe el nombre de "variable independiente".

Por ejemplo:

- La circunferencia de un círculo de radio r está dada por $C = 2\pi r$. Esto significa que C varía en forma directamente proporcional con r, y que 2π es la constante de proporcionalidad. C es la variable dependiente y r es la variable independiente.

- El área de un círculo de radio r está dada por $A = \pi r^2$, lo que implica que A es directamente proporcional con r^2, siendo π la constante de proporcionalidad. En este caso, A es la variable dependiente y r es la independiente.

- El volumen de un cubo de lado a está dado por $V = a^3$. En este caso el volumen V varía directamente con el cubo del lado, a^3, y la constante de proporcionalidad es 1. Aquí V es la variable dependiente y a es la variable independiente

Ejemplo 1

Una persona almacena agua que sale de una manguera y registra los siguientes datos:

En 5 segundos almacena 15 litros;
En 10 segundos almacena 30 litros;
En 30 segundos almacena 90 litros;
En 60 segundos almacena 180 litros

Se puede notar que el tiempo transcurrido al recolectar el agua (al cual llamaremos t) es una variable, y también lo es la cantidad de agua recolectada (a la que llamaremos C).
La cantidad de agua recolectada depende del tiempo transcurrido, por lo que C es la **variable dependiente**, mientras que t es la **variable independiente**.

Con la siguiente tabla podemos analizar lo que ocurre con las razones entre las variables C y t:

t (segundos)	C (litros)	$\frac{C}{t}$ (litros sobre segundo)
5	15	15/5 = 3
10	30	30/10 = 3
30	90	90/30 = 3
60	180	180/60 = 3

Tabla 1

Se puede ver que la razón $\frac{C}{t}$ siempre se mantiene constante. Esta es la característica que permite afirmar que la variación es directa proporcional.
Como la razón $\frac{C}{t}$ siempre vale 3, se puede escribir

$$\frac{C}{t} = 3$$

Y despejando C obtenemos:

$$C = 3t$$

Esta expresión tiene la forma $y = kx$, que corresponde a una variación directamente proporcional.

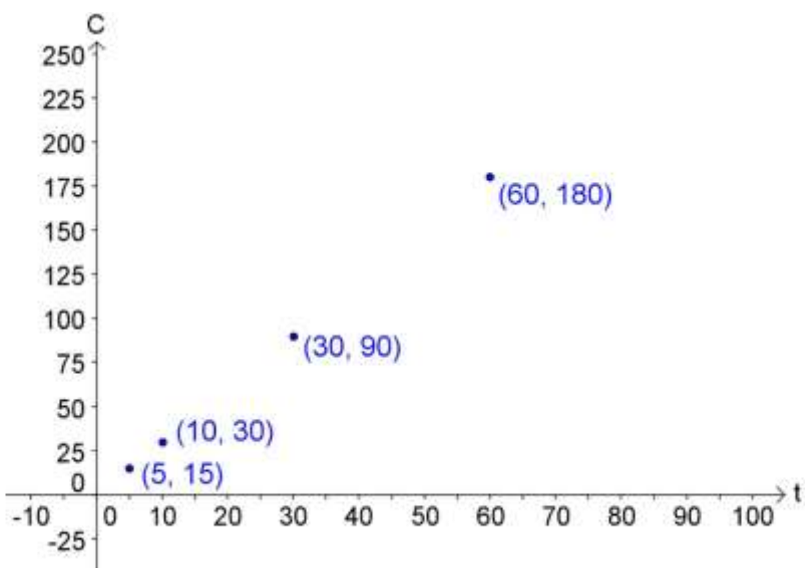
Ahora procederemos a graficar los datos de la tabla 1; recuerda que el plano Cartesiano se compone por dos rectas perpendiculares entre sí (que forman un ángulo de noventa grados), donde el eje horizontal se denomina eje de las abscisas (x) y el eje vertical eje de las ordenadas (y) y ambos representan el conjunto de los números reales.

Cada par de valores correspondientes a un renglón de la tabla conforman un par ordenado, conocido también como coordenadas, donde el primer valor corresponde a la variable independiente y se localiza en el eje x y el segundo valor corresponde a la variable dependiente y se localiza en el eje y.

Cuando construimos un sistema de coordenadas rectangulares o plano Cartesiano, es importante establecer una escala numérica en cada uno de los ejes, para lo cual es necesario que la cantidad que representa la distancia desde el origen hasta un valor dado, siempre represente ese mismo valor, es decir, no es correcto por ejemplo, poner marcas cada centímetro y que hasta la primer marca valga cinco y hasta la segunda veinte; por lo que se debe respetar la misma unidad de medida establecida; en el ejemplo dado, la segunda marca debería corresponder a diez y la tercera a quince y así sucesivamente.

Para efectos prácticos, los ejes pueden tener escalas numéricas diferentes, como en ejemplo siguiente en el eje x tiene una escala de diez en diez y el eje y de veinticinco en veinticinco.

Si los datos de la tabla 1 se grafican, se obtendrá una representación como la siguiente:



Los puntos se ajustan a una línea recta, lo cual siempre ocurre en el caso de una variación directamente proporcional.

Ejemplo 2

En la siguiente tabla se representa una variación directamente proporcional entre dos variables. Obtén la constante de proporcionalidad y empléala para completar la tabla. Elabora la gráfica correspondiente.

X	Y
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	21

Solución

Dado que la variación es directa, debe cumplir con una relación que tiene la siguiente forma:

$$y = kx$$

Calcularemos el valor de la constante de proporcionalidad k.

Utilizando los valores de la tabla, $x = 1$, $y = 3$, tendremos:

$$3 = k(1)$$

Despejando a k tendremos:

$$k = \frac{3}{1} = 3$$

Esto significa que la expresión de la variación directamente proporcional que corresponde a esta situación es:

$$y = 3x$$

Emplearemos la expresión anterior para completar la tabla. Tomamos el valor $x = 2$ y lo sustituimos en $y = 3x$, obteniendo:

$$y = 3(2) = 6$$

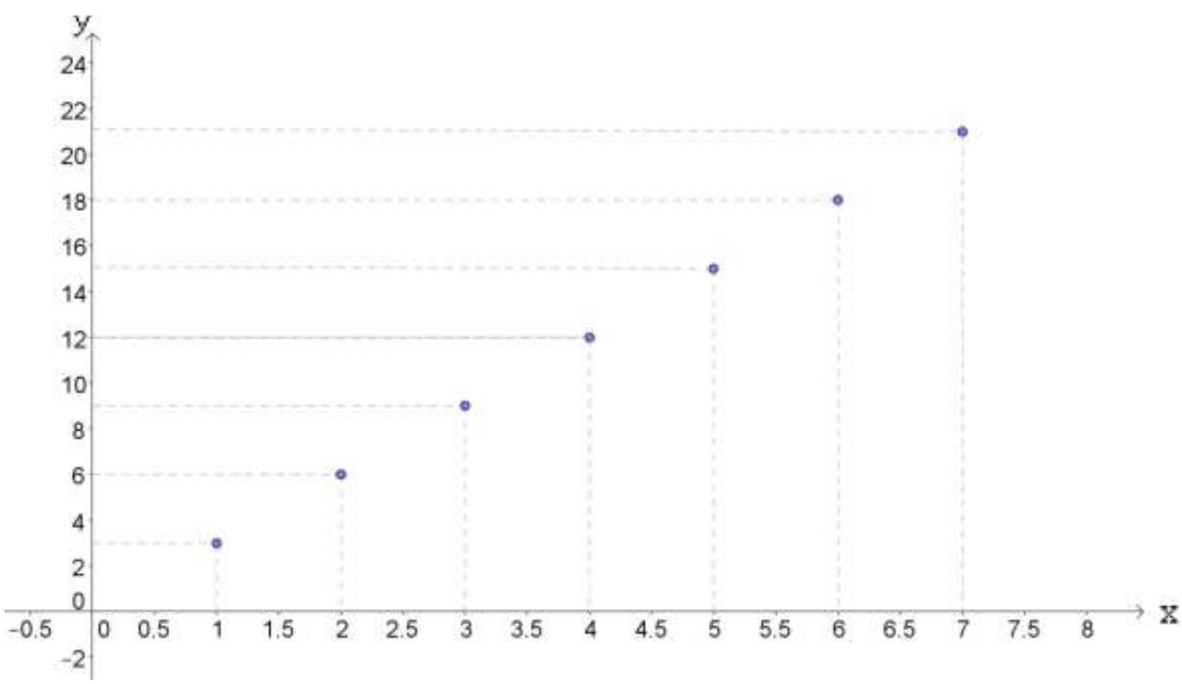
Procediendo de manera similar, sustituimos cada valor de x para obtener los correspondientes valores de y:

$$y = 3(3) = 9$$
$$y = 3(4) = 12$$
$$y = 3(5) = 15$$
$$y = 3(6) = 18$$
$$y = 3(7) = 21$$

Completamos la tabla:

x	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21

Y graficamos:



Ejemplo 3

Si z es directamente proporcional a x, determina el valor de la constante de proporcionalidad. Se sabe que $z = 6$ cuando $x = 5$.

Solución

Establecemos la ecuación de variación:

$$z = kx$$

Despejando k y sustituyendo los valores de z, x:

$$k = \frac{z}{x}$$
$$k = \frac{6}{5}$$

Ejemplo 4

Obtener la ecuación y la constante de proporcionalidad, cuando w varía directamente con r. Por otra parte $w = 20$, para $r = 4$. Si $r = 9$, ¿cuál es el valor de w?

Solución

Establecemos la ecuación de variación.

$$w = kr$$

Despejando la constante se tiene:

$$k = \frac{w}{r}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$k = \frac{20}{4} = 5$$

Como $k = 5$, la ecuación de variación resulta ser

$$w = 5k$$

Para calcular el valor de w cuando $r=9$, empleamos la ecuación anterior. Si sustituimos el valor dado para r, se tiene que:

$$w=5(9)=45$$

Ejemplo 5

El peso de una esfera sólida es proporcional al cubo de su radio. Una esfera de 4 cm de radio pesa 2.4 kg. Encontrar el peso de otra esfera de 6 cm de radio hecha del mismo material.

Solución

El hecho de que el peso p sea proporcional al cubo del radio r se representa mediante la expresión:

$$p = kr^3$$

Para calcular la constante de proporcionalidad k, la despejamos:

$$k = \frac{p}{r^3}$$

Y sustituimos los valores que se nos dan:

$$k = \frac{2.4}{4^3} = \frac{2.4}{64} = 0.0375$$

Así que la expresión que establece la proporcionalidad se convierte en

$$p = 0.0375r^3$$

Para calcular el peso que corresponde a una esfera de radio 6 cm, sustituimos ese valor y tenemos:

$$p = 0.0375(6)^3$$

Con lo que se obtiene que dicho peso es $p = 8.1\ kg$

Ejemplo 6

Una paleta de dulce cuesta $2.00 ¿Cuánto costarán 3, 5, 6, 8 y 10 paletas? Encuentra la constante de proporcionalidad y dibuja una gráfica que represente la variación entre número de paletas y su costo total.

Solución

Como se sugiere que hay proporcionalidad entre el número de paletas y el costo total a pagar, lo primero es establecer la expresión

$$y = kx$$

Donde x = número de paletas, y = costo total. A partir de ahí, despejamos a la constante de proporcionalidad k:

$$k = \frac{y}{x}$$

Como 1 paleta cuesta $2.00, sustituimos:

$$k = \frac{2}{1} = 2$$

Así que la expresión que corresponde a esta variación es

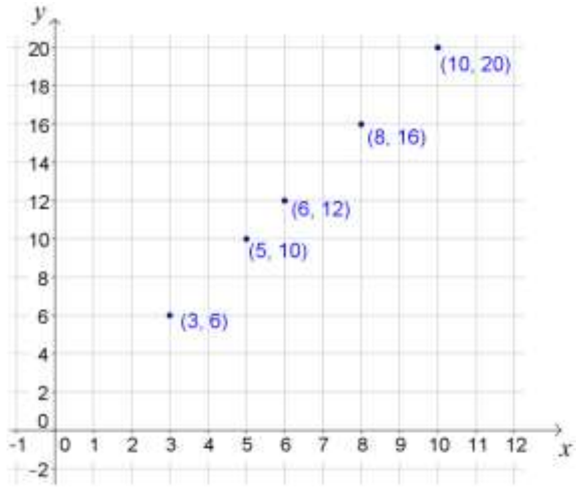
$$y = 2x$$

Para calcular el precio que costará comprar 3, 5, 6, 8 y 10 paletas, sustituimos en la ecuación anterior los valores $x = 3$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 8$, $x = 10$, con lo que también puede llenarse una tabla x vs y:

$$y = 2(3) = 6$$
$$y = 2(5) = 10$$
$$y = 2(6) = 12$$
$$y = 2(8) = 16$$
$$y = 2(10) = 20$$

x	y
3	6
5	10
6	12
8	16
10	20

Con ayuda de la tabla se obtiene la gráfica siguiente:



Ejercicios de variación directa proporcional

1. Cuando una persona compra una tela (de anchura constante) paga por ella un precio P que depende de la longitud L adquirida. Suponga que 1 m de cierto género cuesta $50.00.
   Completa la tabla con los valores de P correspondientes a los valores de L que se indican:

L (m)	1	2	3	4	5	6
P (pesos)	50					

   Una vez terminada la tabla, responde:

   a) Al duplicar el valor de L ¿Se duplica también el valor de P?
   b) Si se triplica el valor de L, ¿qué ocurre con el de P?
   c) Entonces ¿qué tipo de relación existe entre P y L?
   d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre P y L?
   e) Escribe una expresión algebraica que corresponda a la variación de P con L.

2. Supóngase que el peso de una persona es directamente proporcional a su estatura, con una constante de proporcionalidad igual a 0.375. ¿Cuánto pesará una persona que mide 160 cm?

3. A es directamente proporcional al cuadrado de r. Determina la ecuación que representa este hecho.
4. F varía directamente con el cubo de y. Determina la ecuación que representa este hecho.
5. La ley de Hooke establece que la longitud de un resorte es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Si con una fuerza de 25 N la longitud es de 15 cm ¿Cuál será su longitud si la fuerza es de 20 N?
6. El peso en Newtons de un objeto (W) en la superficie terrestre es directamente proporcional a su masa en kilogramos (m). Si un objeto pesa 92 N cuando su masa es de 72 kg, encuentra la masa que corresponde a otro objeto que pesa 110 N.
7. La fuerza (F) necesaria para mover un objeto a lo largo de un plano varía proporcionalmente con su peso (W). Si para mover un objeto de 50 kg se requiere una fuerza de 65 N, ¿cuál será el peso que se logra mover con una fuerza de 95 N?
8. La longitud L de las marcas de los neumáticos de un automóvil producidas cuando se aplican los frenos varía directamente con el cuadrado de la velocidad v del auto. Si las marcas producidas al frenar a 30 Km/h miden 5 m, ¿con qué velocidad debe ir el mismo auto para producir marcas de 15 m?
9. La razón de peso de un objeto en la Tierra a su peso en Neptuno es 7:5. ¿Cuánto pesa una persona en Neptuno si en la Tierra pesa 75 Kg?
10. En una mezcla de cal y arena, la razón de sacos de cal a sacos de arena es de 2:5. ¿Qué cantidad de arena se ha de mezclar con 14 sacos de cal para preparar este tipo de mezcla?
11. Bajo el supuesto de que el peso en kilogramos de una persona es directamente proporcional a su estatura en centímetros, con una constante de proporcionalidad de $k = 0.4$, ¿cuánto mide una persona que pesa 80 kg?

12. La cantidad de basura que se genera en una ciudad es directamente proporcional al número de habitantes que viven en ella. Si 10,000 habitantes producen anualmente 2,500 toneladas de basura ¿Cuántas toneladas de basura se producirán al año en una ciudad de 150,000 habitantes?

13. En un laboratorio de fisiología, al medir durante cierto tiempo los litros de sangre que bombea el corazón de una persona cuyo peso es de 70 kg, se obtuvieron los siguientes datos:

Litros de sangre que bombea el corazón	20	35	50	60
Tiempo en minutos	4	7	10	12

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

b) ¿Cuántos litros de sangre bombea el corazón en 30 minutos?

14. Un automóvil recorre 100 km en una hora a una velocidad constante.

a) El automóvil recorre 20 km en ________minutos.

b) El automóvil recorre________ km en 20 minutos.

c) El automóvil recorre 130 km en ________minutos.

d) El automóvil recorre________ km en una hora con 15 minutos.

15. Si el metro de tela cuesta $16.00 pesos, establece la expresión algebraica que representa la variación (directamente proporcional) entre el precio de tela y el número de metros comprados. Elabora una tabla y dibuja su gráfica. Utiliza valores de 5, 10, 15, 25 y 30 m para la tela adquirida.

16. Si un kilo de helado de chocolate de cierta marca cuesta $24.00, establece la expresión algebraica que corresponde a la variación directamente proporcional entre el precio del helado y los kg comprados. Usa dicha expresión para elaborar una tabla y dibuja su gráfica. Utiliza valores de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kg para el helado comprado.

17. Para calentar agua se ha observado que la temperatura (T) en grados centígrados es directamente proporcional al tiempo trascurrido (t) en segundos. Si $T = 40.4^o$ cuando t = 90 s, encontrar

a) Una expresión algebraica que represente la relación de T con respecto a t.

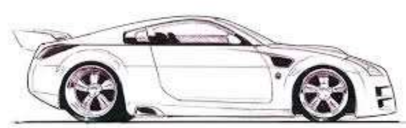
b) ¿Qué temperatura tendrá el agua cuando hayan trascurrido 120 segundos?

c) ¿En qué tiempo el agua alcanzará una temperatura de 99^o C?

18. Un automóvil viaja a una velocidad constante (v) de 40 km por hora.

a) Completa la siguiente tabla y luego determina el tiempo (t) requerido para desplazarse una distancia (d) de 320 km:

t (horas)	d (km)
0	
2	80
	100
	200
10	
12	



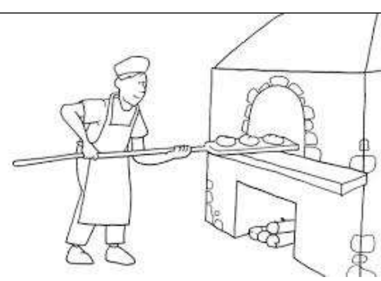
Recuerda que $d = vt$.

b) Elabora una tabla con los mismos valores para el tiempo, suponiendo que la velocidad es ahora de 72 km por hora.

19. El Sr. Pérez vende bolillos a $1.5 la pieza. En la compra de su pan, la bolsa de papel es gratis.

a) Completa la siguiente tabla y determina el costo de comprar 12 piezas de bolillo:

Cantidad (piezas)	Costo ($)
0	
3	4.5
7	
	16.5
	22.5
	30



b) Elabora una nueva tabla suponiendo que hubo un incremento en las materias primas, por lo cual el precio por pieza sube a \$2.5.

Respuestas de los ejercicios de variación directa proporcional

1. La tabla completa aparece a continuación:

L (m)	1	2	3	4	5	6
P (pesos)	50	100	150	200	250	300

a) Al duplicar el valor de L ¿Se duplica también el valor de P?
Se puede observar en la tabla que así es.

b) Si se triplica el valor de L, ¿qué ocurre con el de P?
Se triplica el valor de P.

c) Entonces ¿qué tipo de relación existe entre P y L?
Varían de forma directamente proporcional.

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre P y L?
Puesto que se trata de una variación directamente proporcional, se comporta de acuerdo con una expresión del tipo

$$y = kx$$

A partir de esta expresión podemos calcular la constante de proporcionalidad. Despejándola, queda:

$$k = \frac{y}{x}$$

Como el precio (P) depende de la cantidad de tela (L), la variable dependiente (y) es el precio y la variable independiente (x) es la cantidad de tela:

$$k = \frac{p}{L}$$

Sustituyendo una pareja de valores cualquiera de las que tenemos en la tabla, se obtiene:

$$k = \frac{50}{1} = 50$$

Así que la constante de proporcionalidad es de 50. Puedes verificar que se obtendría el mismo valor al emplear cualquier otra pareja.

e) Escribe una expresión algebraica que corresponda a la variación de P con L.
Tomando en cuenta el inciso anterior, la expresión algebraica correspondiente es $P = 50L$.

2. Una persona que mide 160 cm., pesará 60 kg.
3. $A = kr^2$
4. $F = ky^3$
5. 12 cm.
6. $m = \frac{1980}{23} = 86.09\ kg$
7. $W = \frac{950}{13} = 73.08\ N$
8. El hecho de que la longitud sea proporcional al cuadrado de la velocidad se representa mediante una expresión de la forma $L = kv^2$. Empleando los valores dados para la longitud correspondiente a una cierta velocidad, se puede calcular el valor de k. Luego se podrá calcular la velocidad necesaria para producir marcas de 15 m. El valor es $v = \sqrt{2700}\ {}^{km}/_{h}$.
9. El hecho de que la razón del peso en la Tierra al peso en Neptuno sea 7:5 permite escribir que $\frac{P_T}{P_N} = \frac{7}{5}$. A partir de esta expresión y usando el peso dado en la Tierra, se puede obtener que el peso en Neptuno sería de 53.57 kg.
10. 35 sacos de arena.
11. R= 200 cm mide una persona que pesa 80 Kg.
12. $B = 37{,}500$ son las toneladas de basura generadas por 150,000 habitantes.
13. a) La constante de proporcionalidad es 5.
b) En 30 minutos se bombean 150 litros de sangre.
14. Es conveniente elaborar una tabla para representar de forma clara los datos conocidos y los valores faltantes.

Para empezar, hace falta convertir las horas a minutos para facilitar los cálculos.

Como se sugiere que hay proporcionalidad entre el tiempo y la distancia recorrida por el automóvil, lo primero es establecer la expresión

$$d = kt$$

Donde d = distancia recorrida (en kilómetros), t = tiempo transcurrido (en minutos). A partir de ahí, despejamos a la constante de proporcionalidad k:

$$k = \frac{d}{t}$$

Como el automóvil recorre 100 km en 60 min, sustituimos:

$$k = \frac{100}{60} = \frac{10}{6}$$

Así que la expresión que corresponde a esta variación es

$$d = \frac{10}{6}t$$

a) Utilizando los valores de la tabla, $d = 20\ km,$ tenemos

$$20 = \frac{10}{6}(t)$$

$$\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}\right)20 = \left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}\right)\frac{10}{6}(t)$$

$$12 = t;\ t = 12\ minutos$$

b) Utilizando los valores de la tabla, $t = 20\ min$, tendremos:

$$d = \frac{10}{6}(20)$$

$$d = \frac{200}{6}$$

$$d = 33.\overline{3}\ km$$

c) Utilizando los valores de la tabla, $d = 130\ km,$ tenemos

$$130 = \frac{10}{6}(t)$$

$$\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}\right)130 = \left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}\right)\frac{10}{6}(t)$$

$$78 = t; t = 78\ minutos$$

d) Utilizando los valores de la tabla, $t = 15\ min$, tendremos:

$$d = \frac{10}{6}(15)$$

$$d = \frac{150}{6}$$

$$d = 25\ km$$

Completamos la tabla con los valores de distancia correspondientes a los valores de tiempo que se indican:

Tiempo (minutos)	**60**	***12***	20	***78***	15
Distancia (Km)	**100**	20	$\mathbf{33.\overline{3}}$	130	***25***

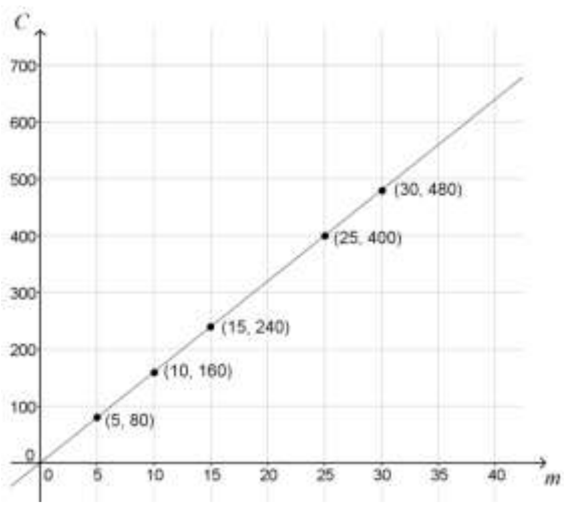
15. Como el metro cuadrado de tela cuesta \$16, si llamamos C al costo total y m a los metros cuadrados comprados, la expresión correspondiente será

$$C = 16m$$

Con esta expresión se puede llenar la tabla siguiente:

m	C
5	80
10	160
15	240
25	400
30	480

La gráfica que corresponde sería:



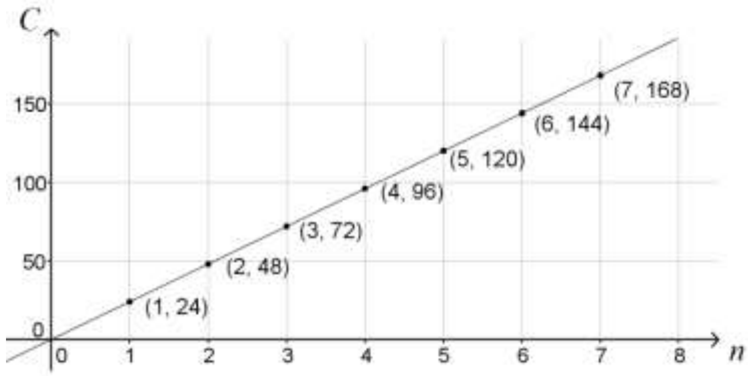
16. Si llamamos C al costo total y n al número de kilogramos de helado comprados, la expresión correspondiente es

$$C = 24n$$

Usando esa expresión se puede llenar la tabla solicitada:

n	C
1	24
2	48
3	72
4	96
5	120
6	144
7	168

Y a partir de la tabla se puede dibujar la gráfica solicitada:



17. a) Hay una constante de proporcionalidad que se calcula así:
k = 40.4/90 = 404/900 =101/225. La expresión requerida es T = (101/225)t.
b) 808/15 = 53.87°
c) 20275/101 = 220.5445 s.

18. a)

t(horas)	d (km)
0	0
2	80
2.5	100
5	200
10	400
12	480

Para desplazarse 320 km son necesarias 8 horas.

b)

t (horas)	d (km)
0	0
2	144
2.5	180
5	360
10	720
12	864

19. a)

x	y
0	0
3	4.5
7	10.5
11	16.5
15	22.5
20	30

Comprar 12 piezas costaría $18.

b)

x	y
0	0
3	7.5
7	17.5
11	27.5
15	37.5
20	50

FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es una relación entre dos variables que puede representarse de la forma

$$y = ax + b$$

Donde a y b son números reales constantes, y $a \neq 0$. También se puede escribir

$$f(x) = ax + b$$

donde $y = f(x)$.

En esta última expresión, $f(x)$ se lee "f de x".

La expresión $y = ax + b$ se puede representar gráficamente en un plano cartesiano. Para ello es necesario obtener parejas de números (x, y) que representarán, cada una, un punto en dicho plano. La gráfica de una función lineal siempre es una línea recta, como se ejemplificará ahora:

Ejemplo 1

Un vendedor de pólizas de seguros recibe un sueldo diario de $\$80.00$ y una comisión de $\$50.00$ por cada póliza vendida.

a) ¿Cuál es el modelo algebraico que representa la solución al problema?
b) Si vendió 15 pólizas en un día ¿Cuánto gano?
c) Si en un día recibió $\$630.00$ ¿cuántas pólizas vendió?
d) Construye la gráfica que representa al modelo.
e) Si no vende ninguna póliza, ¿cuánto gana? ¿aparece esto representado en la gráfica?

Solución

a) Se sabe que el vendedor recibe un sueldo base de $ 80.00 venda o no pólizas y que le pagan $ 50.00 por cada póliza vendida.
El sueldo total diario del vendedor está compuesto por el sueldo base más la comisión por las pólizas vendidas. Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$y = 50x + 80$$

b) Como en este caso la variable independiente x corresponde al número de pólizas vendidas (15), al sustituir en la ecuación se obtiene:

$$y = 50\,x + 80$$
$$y = 50\,(15) + 80$$
$$y = 750 + 80$$
$$y = 830$$

Esto significa que por vender 15 pólizas, su sueldo total es de $830.

c) En este caso el sueldo total es la variable dependiente "y"; al sustituir el valor $630 en la ecuación tenemos:

$$y = 50\,x + 80$$
$$630 = 50\,x + 80$$

Despejando a x

$$630 - 80 = 50x$$
$$\frac{630-80}{50} = x$$

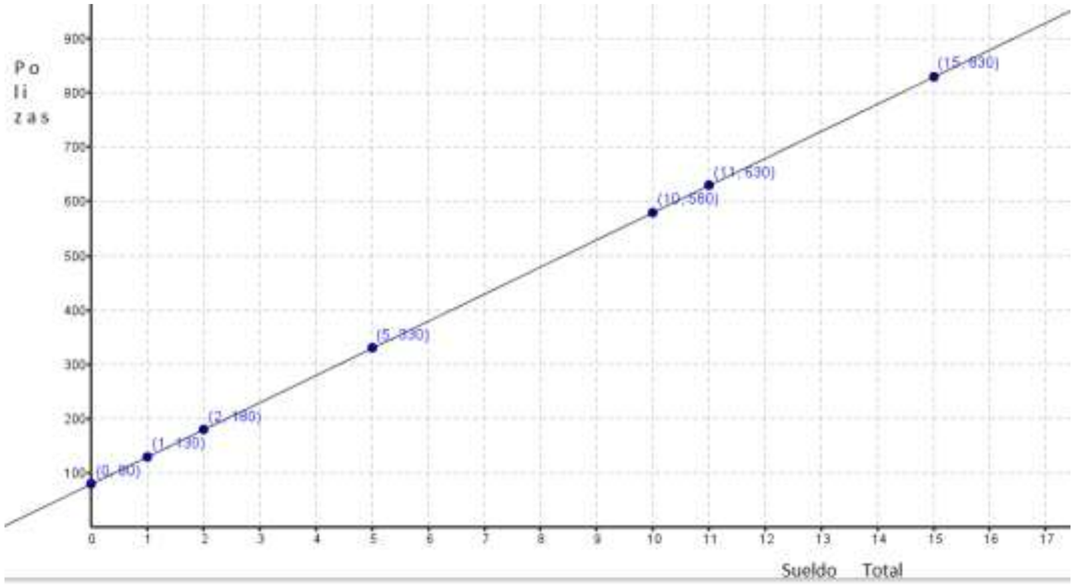
Obtenemos:

11 = x; x =11

Por tanto, 11 es el número de pólizas que vendió para poder ganar $\$630.00$.

d) Para graficar esta función, calculamos el salario diario por la venta de distintos números de pólizas:

x (pólizas)	y (sueldo total)
0	80
1	130
2	180
5	330
10	580
11	630
15	830

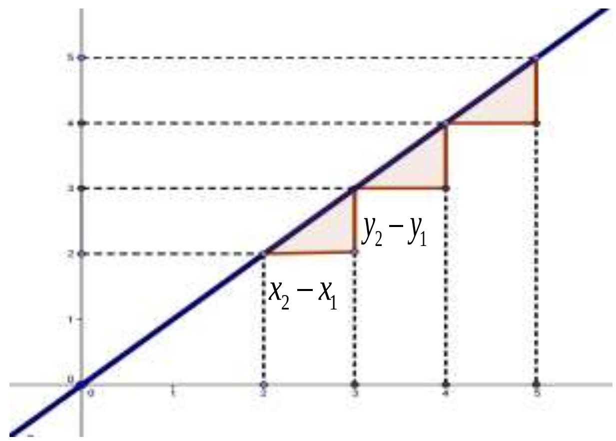


e) Si no vende ninguna póliza, ganará solamente \$80. En la gráfica, este valor corresponde a la intersección de la recta con el eje “y”.

Las anteriores (ecuación, tabla y gráfica) son distintas representaciones de un mismo objeto matemático: la función que modela la relación entre sueldo total y número de pólizas vendidas.

Papel de los parámetros $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{y = ax + b}$

En la representación $y = ax + b$, la constante “a” es una razón que establece cuánto cambia la variable “y” cuando hay cambio en la variable “x”. Esto se ilustra a continuación:



El cambio de la variable “x” se denota Δx, y se calcula haciendo

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

De forma análoga, el cambio en la variable “y” es:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Resulta ser que la razón de Δy a Δx es la constante “a”, es decir:

$$a = \frac{y}{x} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A esta constante se le denomina “razón de cambio” o “pendiente”.

Por otra parte, el valor de la constante “b” indica el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero. Suele llamársele “ordenada al origen”. Gráficamente, indica cuál es el punto en el que la recta corta al eje de las ordenadas.

Ejemplo 2

Dos variables x, y están relacionadas de manera tal que entre otros, presentan los siguientes valores:

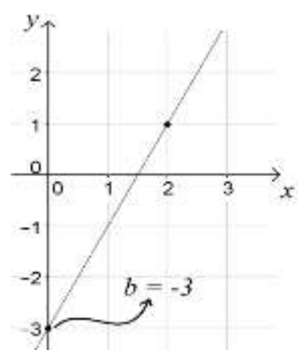
x	y
0	-3
2	1

Si se sabe que esta relación es una función lineal, encuentra la ecuación que le corresponde.

Solución

Las dos parejas de valores que se nos proporcionan para "x" y "y" se pueden localizar en el plano cartesiano, con lo que obtenemos dos puntos que (dado que se dice que la función es lineal) podemos unir con una línea recta.

Así se obtiene esta gráfica:



Podemos reconocer que cuando $x = 0$, ocurre que $y = -3$, de manera que el valor de b en $y = ax + b$ es $b = -3$.

Calcularemos ahora el valor de "a", la razón de cambio:

Tomamos a P_1 (0,-3) y al P_2 (2,1) sustituimos para calcular.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{2-0} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Hay que notar que no importa cómo nombremos a los puntos; si hubiéramos hecho P_2 (0,-3) y al P_1 (2,1) se obtendría el mismo resultado:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

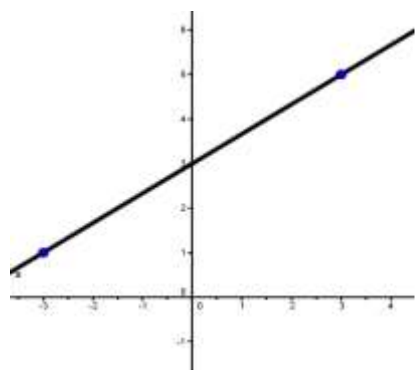
Sustituimos en la ecuación de la recta los valores que calculamos y nos queda:

$$y = ax + b$$
$$y = 2x + (-3)$$
$$y = 2x - 3$$

Ejemplo 3

Dos variables están relacionadas de manera tal que cuando $x = -3$ entonces $y = 1$, y cuando $x = 3$ se tiene $y = 5$.
Suponiendo que la relación es una función lineal, encuentre la ecuación que le corresponde.

Solución
Usando las parejas de valores dadas, se puede obtener la gráfica siguiente:



Como los puntos son (-3,1) y (3,5), obtenemos la razón de cambio (pendiente):

Sea $P_1(-3,1)$ y $P_2(3,5)$. Sustituimos para calcular el valor de a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Sustituimos el valor de la pendiente en la ecuación $y = ax + b$, con lo que se obtiene

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Para determinar el valor del parámetro b, podemos utilizar cualquiera de los dos puntos dados; tomemos por ejemplo $P_1(-3,1)$, y lo sustituimos en la ecuación anterior:

$$1 = \frac{2}{3}(-3) + b$$

$$1 = -2 + b$$

$$1 + 2 = b$$

$$b = 3$$

Sustituyendo en la ecuación

$$y = ax + b$$
$$y = \frac{2}{3}x + (3)$$
$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

Ejemplo 4

Considera la función lineal cuya expresión algebraica es $3x + 2y = 6$.

a) Determina el valor de la razón de cambio a.
b) Calcula el valor de la ordenada al origen b.
c) Dibuja la gráfica de que corresponde a dicha función.

Despejamos a y de la función

$$3x + 2y = 6$$
$$2y = -3x + 6$$
$$y = \frac{-3x + 6}{2}$$
$$y = \frac{-3x}{2} + \frac{6}{2}$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

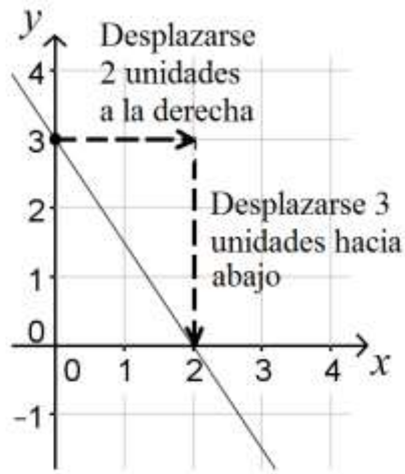
a) Comparando con $y = ax + b$, observamos que la razón de cambio es $a = -\frac{3}{2}$
b) De la misma manera, vemos que la ordenada al origen es $b = 3$.
c) Para construir la gráfica, utilizaremos la razón de cambio.
   Ubiquemos la ordenada al origen; como $b = 3$, la gráfica cortará al eje de las ordenadas en el punto (0, 3).
   A partir de ese punto, desplacémonos verticalmente tantas unidades como indique el numerador de la razón de cambio.

Hay que tomar en cuenta que si la razón de cambio es positiva, el desplazamiento es hacia arriba; si es negativa es hacia abajo.

Luego desplázate horizontalmente tantas unidades como indique el denominador de la razón de cambio.

En este caso, la razón de cambio vale $\frac{-3}{2}$, así que hay que desplazarse 3 unidades hacia abajo, y dos unidades hacia la derecha.

La gráfica queda:



Intenta emplear esta idea para encontrar otro punto de la recta: Colócate en el punto (2,0). Desplázate 2 unidades a la derecha y luego, desciende 3 unidades.

¿Cuáles son las coordenadas del punto al que llegaste?

(__ , __)

Nota que el punto al que llegaste pertenece a la misma recta.

Ejemplo 5

Considerando que la siguiente tabla corresponde a una función lineal, determina la expresión algebraica que describe dicha función y completa la tabla.

x	-1	0	1	2	3
y		5		3	

Solución

Para determinar la expresión algebraica, calcularemos la razón de cambio.

$$\text{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0-2} = \frac{2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

En la tabla se proporciona el punto (0, b) = (0, 5), es decir b =5, entonces conocemos la ordenada al origen y la razón de cambio por lo que la expresión algebraica que representa los datos es:

$$y = ax + b$$
$$y = (-1)x + 5$$
$$y = -x + 5$$

Para completar la tabla, evaluemos la expresión anterior para los valores dados de x:

Por ejemplo, cuando $x = -1$,

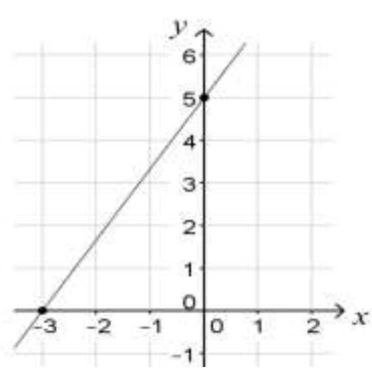
$$y = -(-1) + 5$$
$$y = 1 + 5$$
$$y = 6$$

De la misma manera se calculan lo valores restantes y la tabla queda:

x	-1	0	1	2	3
y	***6***	5	***4***	3	***2***

Ejemplo 6

¿Cuál es la función asociada a la gráfica que se muestra a continuación?



De la gráfica se observa que b tiene un valor b=5

Calculemos la razón de cambio:

$$a = \frac{5-0}{0-(-3)} = \frac{5}{0+3} = \frac{5}{3}$$

Sustituyendo los valores de ***a*** y de ***b*** en la ecuación $y = ax + b$ se tiene:

$$y = \frac{5}{3}x + 5$$

Ejercicios sobre funciones lineales

1. El pago del servicio telefónico consiste en una renta de $180 que incluye hasta 100 llamadas locales, pero adicionalmente se cobra $1.50 por cada llamada extra.
   a) Escribe la función que representa este caso para x llamadas extras.
   b) ¿Cuánto pagará en total, si realiza 20 llamadas extras?
   c) Elabora la gráfica que represente este problema.

2. Un vendedor de enciclopedias gana $650.00 a la semana más $250.00 por cada enciclopedia vendida. Considera este número como el valor x.
   a) Escribe la función que representa el salario del vendedor para x enciclopedias vendidas.
   b) ¿Cuánto ganará si no vende ninguna enciclopedia?
   c) ¿Cuántas enciclopedias tiene que vender para ganar $5,900.00?
   d) Elabora la gráfica que represente el problema.

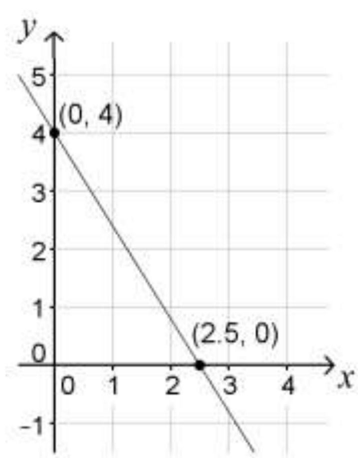
3. Dada la siguiente función lineal $y = 5x + 30$
   a. Escribe cuál es al pendiente y su ordenada al origen.
   b. Elabora una tabla con los siguiente valores para x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
   c. Realiza la gráfica con a los datos anteriores.

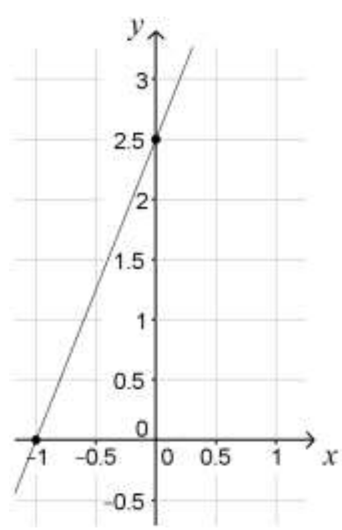
4. El costo de un viaje en taxi, depende del pago inicial fijo que es de $8.00 más $2.50 por cada kilometro recorrido.
   a) Escribe la expresión algebraica que representa el costo de viajar en taxi.
   b) ¿Cuánto pagará una persona que recorre 25 kilometros?
   c) ¿Cuántos kilómetros recorrió si le cobraron $88.00 pesos?
   d) Elabora la gráfica que representa el problema.

5. Los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de una función lineal; grafícalos y determina la expresión algebraica que la representa.
   a) $P_1(-3,-2)$, $P_2(4,6)$
   b) $P_1(2,0)$ y $P_2(0,4)$
   c) $P_a(2,1)$ y $P_b(8,6)$
   d) $P_1\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{10}\right)$ y $P_2\left(\frac{2}{5},-\frac{7}{10}\right)$

6. Elabora la gráfica de la siguientes funciones
   a) $y=4x-3$
   b) $y=\frac{2x}{3}-3$
   c) $y=5x$
   d) $y=\frac{3}{4}x-2$
   e) $y=4+\frac{4}{3}x$
   f) $-2-3x-y=0$

7. Determina la ecuación, la razón de cambio y la ordenada al origen de las siguientes gráficas.





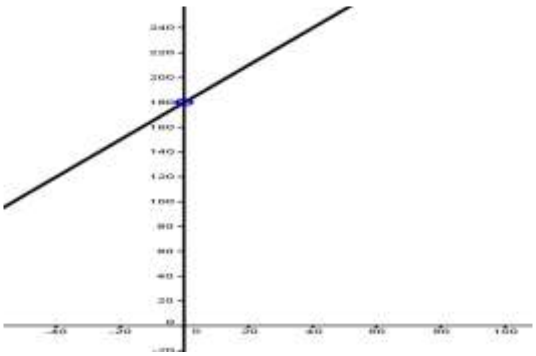
Respuestas a los ejercicios sobre funciones lineales

1.-

a) $y = 180 + 1.5x$

b) $y = 210\,pesos$

c)



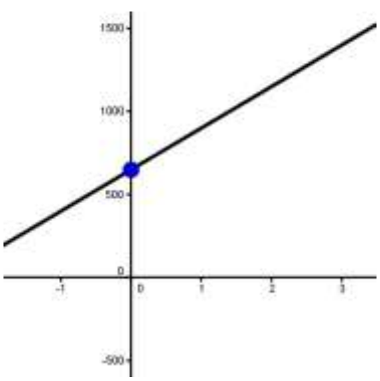
2.-

a) $y = 650 + 250x$

b) $y = 650\,pesos$

c) $x = 21$ enciclopedias

d)

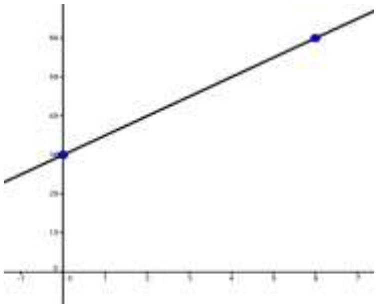


3.-

a) $m = 5$ y $b = 30$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	30	35	40	45	50	55	60

c) 

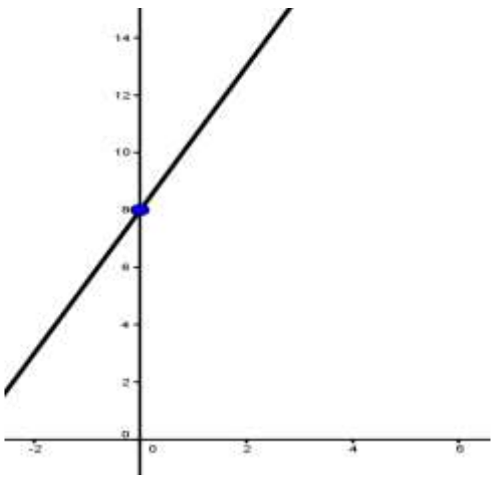
4.-

a) $y = 8 + 2.5x$

b) $y = \$70.5$

c) $x = 32km$

d)



5.-

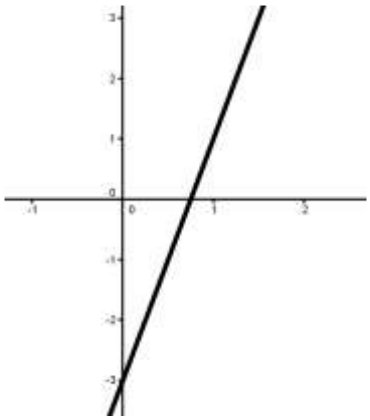
a) $y = \frac{8}{7}x + \frac{10}{7}$

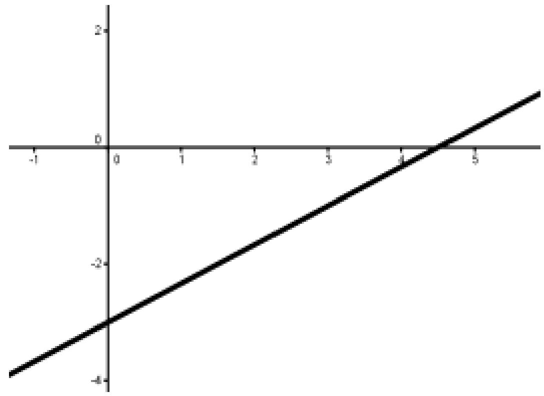
b) $y = -2x + 4$

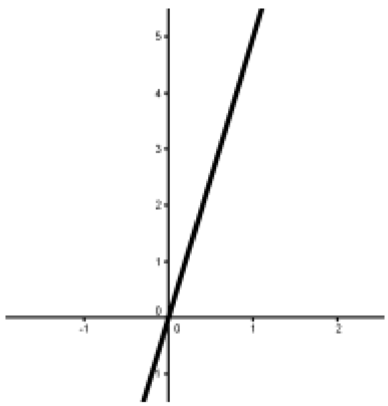
c) $y = \frac{5x - 4}{6}$

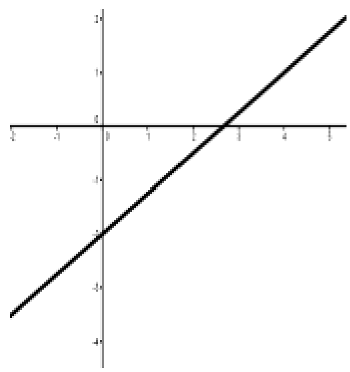
d) $y = -\frac{9}{10}x - \frac{17}{50}$

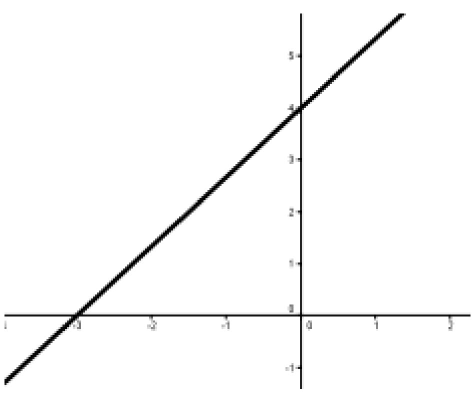
6.-

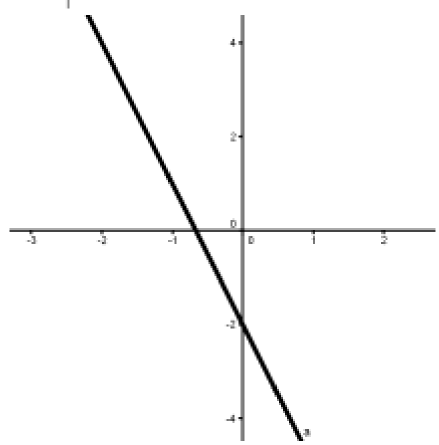

a)


b)


c)


d)


e)


f)

7.-

a) $y = -\frac{8}{5}x + 4$

$m = -\frac{8}{5}$

$b = 4$

b) $-\frac{5}{2}x + y = \frac{5}{2}$

$m = \frac{5}{2}$

$b = \frac{5}{2}$

Autoevaluación

1. La presión P ejercida por cierto líquido en un punto dado varía directamente con la profundidad D del punto bajo la superficie del liquido. La presión ejercida a una profundidad de 15m es de 50 Kg/cm^2 ¿Qué presión ejerce ese líquido a una profundidad de 25m.?

2. La contaminación arrojada a la atmósfera en del D.F. varía diractamente con respecto al promedio de automóviles que circulanen la ciudad, si un promedio de 60000 automóviles producen 2600Kg, determina cúantos kilogramos producirán un promedio de 85000 automóviles.

3. El peso de cada esfera es proporcional al cubo de su radio. Una esfera de 4 m de radio pesa 2.4 kg. Encuentra el peso de otra esfera de 6 cm de radio.

4. Analiza si entre las variablesque se presentan en la tabla, existe una variación directamente proporcional. Si es así,identifica la constante de proporcionalidad y escribe el modelo algebraico.

x	1	2	3	4		10
y	2.6		7.8	10.6		130

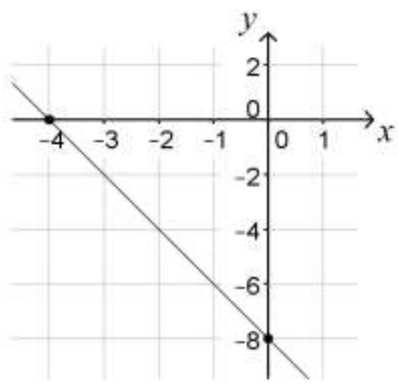
5. Una fábrica de chocolates tiene un gasto fijo mensual de $5500.00 y cada chocolate tiene un costo de fabricación de $2.00.Obténgase.
   a) El modelo algebraico que represente el gasto mensual del fabricante .
   b) La pendiente de la recta.
   c) Elabora la gráfica que lo represente.

6. Grafica las siguientes funciones.
   a) $y = 2x + 7$
   b) $y = -3x + 5$

7. Dados los siguientes puntos,elabora la gráfica y determina la ecuación que corresponde.
   a) $p(-3, 21)$, q(2,3)
   b) $r(2, 22)$, n(-1,-15)

8. Verifíquese si los puntos dados pertenecen a la recta $y = 4x + 5$:
   a) $A(-2,-3)$ y $B(3,16)$ b) $A(-2,-3)$ y $B(3,16)$

9. Determinar la ecuación que corresponde a la gráfica siguiente. Especificar el valor de su razón de cambio:



UNIDAD III

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Propósito:

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes.

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- El alumno comprenderá el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresará en el lenguaje algebraico.

- Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno será capaz de utilizarla para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad

ECUACIONES LINEALES

Definición: una ecuación es una igualdad en el que dos cantidades o expresiones son iguales. Las ecuaciones se utilizan en todos los campos donde se usan números reales.
Ejemplo:
$ax + b = 0$ $\qquad x = -\frac{b}{a}$ Siempre que $a \neq 0$ la ecuación tiene una solución.

$4x + 5 = 0$ $\qquad \boldsymbol{x = -\frac{5}{4}}$

Existen diferentes modelos de ecuaciones lineales:

a) $ax = b$
b) $ax + b = c$
c) $ax + bx + c = d$
d) $a(x + b) = c(x + d)$
e) $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$
f) $\frac{ax+b}{c} = \frac{dx+e}{f}$
g) $(x + b)^2 = (x + c)(x + d)$

Nota: a, b, c, d, e, f pertenecen a los números reales
La adición y la multiplicación de números reales cumplen con una serie de propiedades que se resumen en la tabla siguiente:

Terminología	Adición (suma)	Sustracción (resta)
Propiedad **conmutativa**	$a+b=b+a$	$a(b)=b(a)$
Propiedad **asociativa**	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
0 es el **neutro aditivo**	$a+0=a$	—
1 es el **neutro multiplicativo**	—	$1(a)=a$
Si $a\neq 0$, entonces $-a$ es el **inverso aditivo** de a.	$a+(-a)=0$	—
Si $a\neq 0$, entonces $\frac{1}{a}$ es el **inverso multiplicativo** de a.	—	$a(\frac{1}{a})=1$
Propiedad **distributiva** de la multiplicación sobre la adición	$a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)c=ac+bc$	

Para resolver las ecuaciones debes tomar en cuenta las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad para despejar la incógnita en un lado de la igualdad.

La ***propiedad aditiva*** de la igualdad establece que podemos sumar el mismo número en ambos lados de la ecuación sin alterar la solución de la ecuación original, la propiedad aditiva también nos permite restar el mismo número en ambos lados de la ecuación.

La ***propiedad de la multiplicación*** de la igualdad establece que podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el mismo número sin alterar la solución. La división se define en los mismos términos que la multiplicación, por lo tanto, nos permite dividir en ambos lados de la ecuación con un número distinto de cero.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación:

$\boldsymbol{2x + 4 = 9}$

$2x + 4 - 4 = 9 - 4$ $2x = 5$	Restar -4 en ambos lados de la ecuación
$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$	Dividir ambos lados entre 2
$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$	Resultado obtenido

Ejemplo 2.

$\boldsymbol{(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)}$

$(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$	Multiplicar factores
$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$	Restar $24x^2$ en ambos lados
$24x^2 - 24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 - 24x^2 + 14x - 3$	Reducir términos
$26x - 8 = 14x - 3$	Restar $14x$ y reducir términos
$26x - 8 - 14x = 14x - 3 - 14x$	
$12x - 8 = -3$	Sumar 8 y reducir términos

$12x - 8 + 8 = -3 + 8$

$12x = 5$

$\frac{12x}{12} = \frac{5}{12}$ Dividir entre 12

$\boldsymbol{x = \frac{5}{12}}$ Resultado obtenido

Ejemplo 3.

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = 12}$$

$\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = 12$ Obtener el mcm. En este caso es 6

$6\left(\frac{(x+3)}{2}\right) - 6\left(\frac{x-1}{3}\right) = 6(12)$ Multiplicar cada miembro por el mcm: 6

$3(x+3) - 2(x-1) = 72$ Realizar operaciones

$3x + 9 - 2x + 2 = 72$ Reducir términos

$x + 11 = 72$ Restar 11

$x + 11 - 11 = 72 - 11$

$\boldsymbol{x = 61}$ Resultado obtenido

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 10 + 2x = 3x + 5 - 5x$ Solución x = 5/3

b) $x + 4(x+2) = 3(x+1) + 25$ Solución x = 10

c) $4(x-3)-(x+5)=0$ Solución x = 17/3

d) $\frac{7x}{4}=\frac{21}{2}$ Solución x = 6

e) $x+\frac{5x}{2}=34$ Solución x = 68/7

f) $2x-3(2x+1)=-3(-x+3)-3$ Solución x = 9/7

g) $\frac{x+5}{x-1}=\frac{2x+3}{2x-3}$ Solución x= 2

h) $\frac{x-4}{8}-\frac{5-2x}{3}=1$ Solución x= 4

i) $\frac{1}{4}+\frac{3y}{8}=\frac{3}{4}$ Solución y= 4/3

j) $\frac{-5x}{2}+\frac{1}{2}=-18$ Solución x= 37/5

k) $2(x+6)=8x$ Solución x=2

l) $80=10(3t+2)$ Solución t= 2

m) $\frac{1}{8}(16y+8)-17=-\frac{1}{4}(8y-1)$ Solución y= 65/16

n) $6(3x-1)=5(4x+3)$ Solución x= -21/2

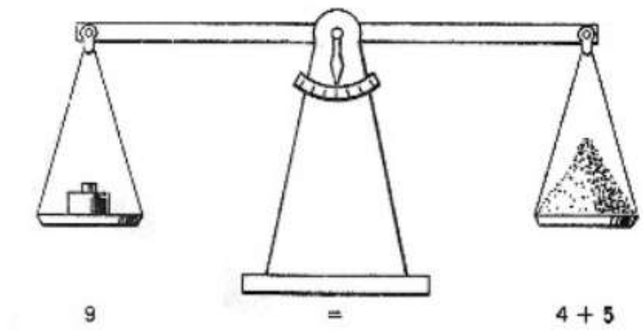
o) $\frac{3(3x-2)}{4}=3x$ Solución x= -2

p) $\frac{6x+2}{5}+\frac{4x-9}{3}=5$ Solución x= 3

LENGUAJE ALGEBRAICO

Para poder resolver este tipo de problema necesitamos interpretar los enunciados a un lenguaje algebraico.

¡Exprésate algebraicamente!



La siguiente serie de ejercicios, tiene como objetivo permitirte identificar cuáles son las principales formas en que se pueden presentar las proposiciones verbales (palabras) para la traducción al lenguaje algebraico.

Ejemplo.

Un número incrementado en 4	$x+4$
Dos veces un número	$2(x)$
Un número menos 5	$x-5$
Un octavo de número	$\frac{x}{8}$
30 disminuido en tres veces C	$30-3C$
50 por la suma de P más 10	$50(P+10)$
Raúl gana cinco veces más que María	$M=x$ y

$R=5x$

Escribe sobre las líneas una expresión algebraica que represente cada uno de los enunciados:

El doble de un número______________________________

El triple de un número______________________________

El cuadrado de un número menos dos____________________

A un número se le restan 6____________________________

La suma de dos números ____________________________

La diferencia de los cuadrados de dos números ________________

El doble de un número aumentado en 5____________________

La diferencia de dos números__________________________

La diferencia de dos números al cuadrado____________________

La mitad de un número____

La mitad del cuadrado de un número___________________________________

El cuádruple de un número____

La suma de un número y su cuadrado__________________________________

La cuarta parte del cubo de un número_________________________________

Un número disminuido en 6____

El doble de un número menos 5_______________________________________

La tercera parte de un número____

El triple de un número aumentado en 12________________________________

El doble del cuadrado de un número disminuido en 5______________________

Cinco veces el cubo de un número aumentado en 4________________________

La raíz cúbica de un número____

La raíz cuadrada del producto de tres números___________________________

El doble de la diferencia de dos números_______________________________

Cuatro veces la diferencia de dos cuadrados_____________________________

Tres veces la diferencia de dos números al cuadrado______________________

El cuadrado de un número por la suma de otro dos________________________

El cuadrado de la tercera parte de un número____________________________

El cuadrado de la suma de dos números ________________________________

El doble de la suma de tres números___________________________________

El triple de la raíz cuadrada de un número______________________________

La mitad de un número más 3____

Tres números pares consecutivos ______________________________________

La cuarta parte más la quinta parte de un número. _______________________

El triple del cuadrado de un número. ___________________________________

La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivo. _______________

La raíz cuadrada de un número. _______________________________________

El doble de un número más 3 es igual a 15. ______________________________

El cubo de un número es igual a 27.____________________________________

El doble del cubo de un número. _______________________________________

El cubo del doble de un número. _______________________________________

La suma de dos números es igual a 16. _________________________________

La diferencia de dos números consecutivos. ______________________________

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Ejemplo 1

La suma de tres números enteros consecutivos es 156. ¿Cuáles son dichos números?

Como no sabemos cuáles son los números pedidos y esto se traduce a una incógnita, por lo tanto, supondremos que:

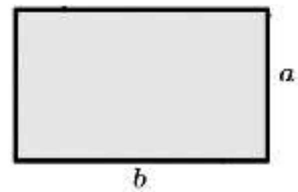
x	Es el primer número
$x+1$	Es el segundo numero consecutivo
$x+2$	Es el tercer numero consecutivo
$x+(x+1)+(x+2)=156$	Dado que la suma de los tres números consecutivos es 156
$x+x+1+x+2=156$	Reducir términos
$3x+3=156$	Restar 3 en ambos lados
$3x+3-3=156-3$	Reducir términos
$3x=153$	Dividir entre 3
$x=\frac{153}{3}$	
$x=51$	Resultado obtenido

Por lo tanto:

$x=51$	Primer número
$x+1=52$	Segundo número consecutivo
$x+2=53$	Tercer número consecutivo

Ejemplo 2

Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 110 m, sabiendo que el largo mide 9 m más que el ancho.



Llamemos ***b*** al lado más largo y ***a*** al ancho del rectángulo.

$2a + 2b = 110$	El perímetro del rectángulo es 110 m
$b = a + 9$	Sabemos que el largo (b) mide 9 m más que el ancho

Por lo tanto:

$2a + 2(a + 9) = 110$	Sustituir el valor de b en la primer expresión
$2a + 2a + 18 = 110$	Reducir términos
$4a + 18 = 110$	Restar 18 en ambos lados
$4a + 18 - 18 = 110 - 18$	
$4a = 92$	Dividir entre 4
$\frac{4a}{4} = \frac{92}{4}$	Reducir términos
$a = 23$	Es el valor del ancho del rectángulo
$b = 23 + 9$	Calculando el largo del rectángulo
$b = 32$	Es el largo del rectángulo

Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

1. La suma de las edades de A y B es 84 años, y B tiene 8 años menos que A. Hallar ambas edades.
R: A = 46 años y B = 38 años.

2. Pagué $870 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó $50 pesos más que el libro y $200 menos que el traje. ¿Cuánto pagué por cada cosa?
R: libro = $190, sombrero = $240 y traje = $440.

3. La suma de tres números enteros consecutivos es 132. Hallar los números.
R: 43, 44 y 45.

4. La edad de P es el doble que la de Q, y ambas edades suman 36 años. Hallar ambas edades.
R: P = 24 años y Q = 12 años.

5. Se ha comprado un coche, un caballo y sus arreos por $35,000. El coche costó el triple de los arreos y el caballo el doble de los que costó el coche. Hallar el costo de los arreos, del coche y del caballo.
R: arreos = $3,500, coche = $10,500 y caballo = $21,000.

6. La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.
R: 99, 67 y 34.

7. Carmen tiene $110 en monedas de $10 y $5, el número de monedas de $10 excede en 2 a las de $5, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Carmen?
R: 8 de $10 y 6 de $5.

8. Carla retira del banco $5,000, en billetes de $500, $200 y $100. Si el número de billetes de $200 excede en 3 a los de $100, y el número de billetes de $100 es el doble de los de $500, ¿cuántos billetes de cada denominación recibió Carla?
R: 11 de $200, 8 de $100 y 4 de $500.

9. Un estanque se llena por una llave en 4 horas y otra lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?
R: 2.4 horas = 2 horas y 24 minutos

10. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a 2/3 de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?
R: 18 cm, 18 cm y 12 cm

11. El largo de un rectángulo mide 4 m menos que el cuádruple de su ancho y su perímetro es de 32 m. ¿Cuánto mide el largo?
R: 12 metros

12. Se desea repartir $180,000 entre A, B y C de modo que la parte de A sea la mitad de la de B y 1/3 de la de C
R: A = $30,000, B= $60,000 y C = $90,000

13. La edad de A es el doble que la de B y hace 15 años la edad de A era el triple que la de B. Hallar las edades actuales.
R: A = 60 años y B = 30 años

14. La edad de A es el triple de la de B y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.
R: A = 60 años y B = 20 años

15. Un hacendado compró el doble de vacas que de bueyes. Por cada vaca pagó $7,000 y por cada buey $8,500. Si el importe de la compra fue de $ 270,000 ¿Cuántas vacas y bueyes compró?
R: 12 bueyes y 24 vacas

UNIDAD IV

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Propósito

Al finalizar la unidad el alumnado será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Comprenderá que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición de un problema que potencialmente lleva a una ecuación con dos variables.
- Graficará las soluciones a un problema con dos variables e identificará el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.
- Expresará algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
- Resolverá gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.
- Resolverá algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
- Comprenderá el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3x3.
- Obtendrá sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.
- Resolverá sistemas de ecuaciones lineales a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Resolverá problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2

A veces se requiere encontrar la solución común de dos o más ecuaciones que forman lo que se denomina un sistema de ecuaciones. El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es, por consiguiente, la intersección de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones del sistema.
Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, se dibujan las gráficas de ambas ecuaciones en un sistema de ejes coordenados. Las coordenadas del punto de intersección, si existe, conforman la pareja ordenada de números que es la solución del sistema.
Las coordenadas del punto de intersección no siempre se pueden leer exactamente, de esta manera, la solución gráfica resulta ser aproximada. Esta sería la principal limitación del método gráfico.
Cuando se dibujan las gráficas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en un sistema de coordenadas cartesianas surgen una de las siguientes posibilidades:

1. Las dos rectas ***coinciden***, en este caso se trata de un sistema compatible integrado por ecuaciones ***equivalentes*** y se tiene infinidad de soluciones comunes.
2. Las rectas ***no se intersecan***; en este caso se trata de un sistema de ecuaciones ***incompatible***. Lo anterior sucede cuando se trata de rectas paralelas y no existe solución para el sistema.
3. Las rectas ***se intersectan*** precisamente en ***un punto***, en este caso se trata de un sistema de ecuaciones ***compatible*** integrado por ecuaciones simultáneas y existe una solución única para el sistema.

Ejemplo 1

En el CCH existe un cineclub, las entradas con descuento para alumnos tienen un precio de \$10.00 y para profesores de \$15.00. ¿Cuántos alumnos y profesores asistieron el viernes pasado si se recaudaron \$375.00 de la taquilla y se sabe que asistieron 35 personas?

Encontrar gráficamente la solución del sistema de ecuaciones.

Lo primero que se debe hacer es identificar las incógnitas del problema y asignarles una literal:

x = No. de alumnos que asistieron
y = No. de profesores que asistieron

A continuación se identifican los datos del problema:

Costo del boleto de alumno	$ 10.00
Costo del boleto de profesor	$ 15.00
Total recaudado en la taquilla	$ 375.00
Total de asistentes	35

Con los datos anteriores se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 10x + 15y = 375 \end{cases}$$

A continuación, lo que se debe hacer es graficar cada una de las ecuaciones del sistema, para esto se despeja alguna de las incógnitas de ambas ecuaciones y después se dan valores a la incógnita que no se despejó para obtener los valores de la variable despejada, para ello se pueden utilizar tablas.
Se despeja a la incógnita y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 35 - x \\ y = \dfrac{375 - 10x}{15} \end{cases}$$

Después se asignan valores a la incógnita x para obtener los valores de la otra incógnita y.

Valores obtenidos para la ecuación $x + y = 35$.

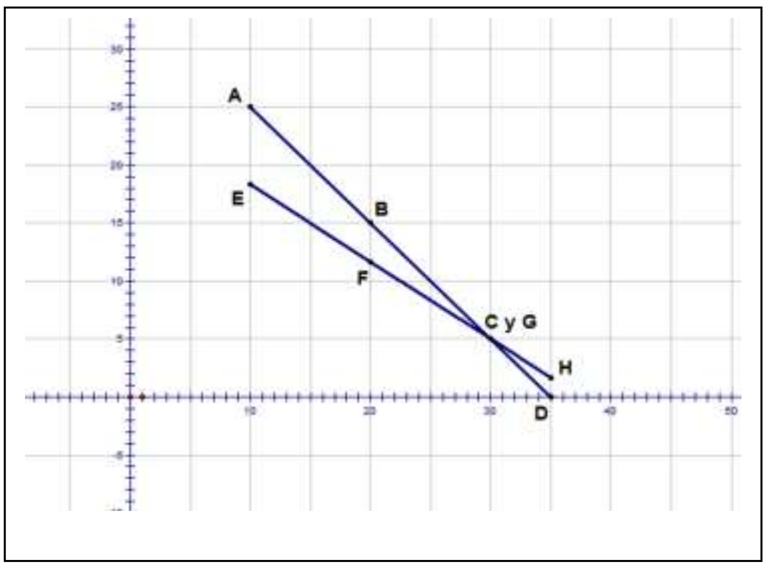
x	$y = 12 - x$	y	Puntos
10	$y = 35 - 10 = 25$	25	A (10,25)
20	$y = 35 - 20 = 15$	15	B (20,15)
30	$y = 35 - 30 = 5$	5	**C (30,5)**
35	$y = 35 - 35 = 0$	0	D (35,0)

NOTA: Los valores asignados a la incógnita x no deben ser mayores que 35, ya que es el número total de personas que ingresaron al cineclub.

Valores obtenidos para la ecuación $10x+15y=375$**.**

x	$y=\frac{375-10x}{15}$	y	Puntos
10	$y=\frac{375-10(10)}{15}=18.33$	18.33	E (10,18.33)
20	$y=\frac{375-10(20)}{15}=11.66$	11.66	F (20,11.66)
30	$y=\frac{375-10(30)}{15}=5$	5	G (30,5)
35	$y=\frac{375-10(35)}{15}=1.66$	1.66	H(35,1.66)

Al analizar las tablas 1 y 2 se observa que existe un punto en común, en la primera tabla es el punto C (30,5) y en la segunda es el punto G (30,5).
Este punto es la solución del sistema. A continuación se grafican ambas ecuaciones para encontrar la solución.



Solución gráfica del sistema de ecuaciónes del ejemplo 1.

Vemos que la solución es precisamente $x=30$ y $y=5$; por lo tanto asistieron 30 alumnos y 5 profesores. Además, las rectas solo se intersectan en un punto; por lo tanto el sistema es compatible.

Es importante comprobar el resultado obtenido, en el caso específico del método gráfico, en ocasiones la solución no está formada por números enteros; sin embargo la comprobación puede arrojar datos aproximados y útiles.
La importancia de la comprobación no solo radica en conocer si el resultado obtenido es correcto, sino que también ayuda a observar el procedimiento realizado de manera inversa. Lo anterior es útil para afianzar el conocimiento.
Así que después de conocer la importancia de la comprobación en la obtención de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, se procede a realizar la comprobación del ejemplo anterior:

El sistema de ecuaciones del ejemplo 1 es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 10x+15y=375 \end{cases}$$

Después de haber graficado ambas ecuaciones en la figura 1, se obtiene que la solución del sistema es la siguiente:

$$x=30$$
$$y=5$$

La comprobación consiste en sustituir los valores anteriores en las ecuaciones del sistema y verificar que se conserve la igualdad de ambos miembros:

$$\begin{cases} 30+5=35 \\ 10(30)+15(5)=375 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12=12 \\ -6=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 35=35 \\ 375=375 \end{cases}$$

Se observa que se conserva la igualdad en ambos miembros de ambas ecuaciones, por lo tanto, la solución obtenida es correcta.

Ejemplo 2

La suma de dos números es igual a 12, y su diferencia es igual a -6, encontrar dichos números.

Encontrar gráficamente la solución del sistema de ecuaciones.

Lo primero es identificar las incógnitas del problema y asignarles una literal:

x = Primer número
y = Segundo número

A continuación se identifican los datos del problema:

Suma de los números	12
Diferencia de los números	-6

Con los datos anteriores se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=-6 \end{cases}$$

A continuación lo que se debe hacer es graficar cada una de las ecuaciones del sistema, para esto se despeja alguna de las incógnitas de ambas ecuaciones y después se dan valores a la incógnita que no se despejó para obtener los valores de la variable despejada, para ello se pueden utilizar tablas.
Se despeja a la incógnita y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y=12-x \\ y=x+6 \end{cases}$$

Después se dan valores a la incógnita x para obtener los valores de la incógnita y .

Valores obtenidos para la ecuación $x+y=12$.

x	$y=12-x$	y	Puntos
1	$y=12-1=11$	11	A (1,11)
3	$y=12-3=9$	9	**B (3,9)**
5	$y=12-5=7$	7	C (5,7)

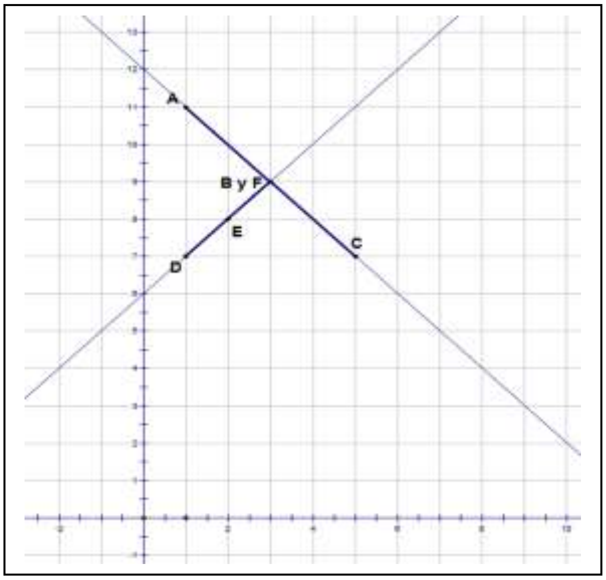
Valores obtenidos para la ecuación $x-y=-6$.

x	$y=x+6$	y	Puntos
1	$y=1+6=7$	7	D (1,7)

2	$y=2+6=8$	8	E (2,8)
3	$y=3+6=9$	9	**F (3,9)**

Al analizar las tablas 3 y 4 se observa que existe un punto en común, en la primera tabla es el punto B (3,9) y en la segunda es el punto F (3,9). Este punto es la solución del sistema. A continuación se grafican ambas ecuaciones para encontrar la solución.

Vemos que la solución es precisamente $x=3$ y $y=9$, además las rectas solo se intersectan en un punto; por lo tanto el sistema es compatible.



Solución gráfica del sistema de ecuaciones del ejemplo 2.

El sistema de ecuaciones del ejemplo 2 es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=-6 \end{cases}$$

Después de haber graficado ambas ecuaciones en la figura 2, se obtiene que la solución del sistema es la siguiente:

$$x=3$$
$$y=9$$

La comprobación consiste en sustituir los valores anteriores en las ecuaciones del sistema y verificar que se conserve la igualdad de ambos miembros:

$$\begin{cases} 3+9=12 \\ 3-9=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12=12 \\ -6=-6 \end{cases}$$

Se observa que se conserva la igualdad en ambos miembros de ambas ecuaciones, por lo tanto, la solución obtenida es correcta.

Ejemplo 3

Encontrar gráficamente la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

Lo primero que se debe hacer es graficar cada una de las ecuaciones del sistema, para esto se despeja alguna de las incógnitas de ambas ecuaciones y después se dan valores a la incógnita que no se despejó para obtener los valores de la variable despejada, para ello se pueden utilizar tablas.

Se despeja a la incógnita y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y=9-3x \\ y=\dfrac{x+4}{2} \end{cases}$$

Después se dan valores a la incógnita x para obtener los valores de la incógnita y.

Valores obtenidos para la ecuación $3x+y=9$.

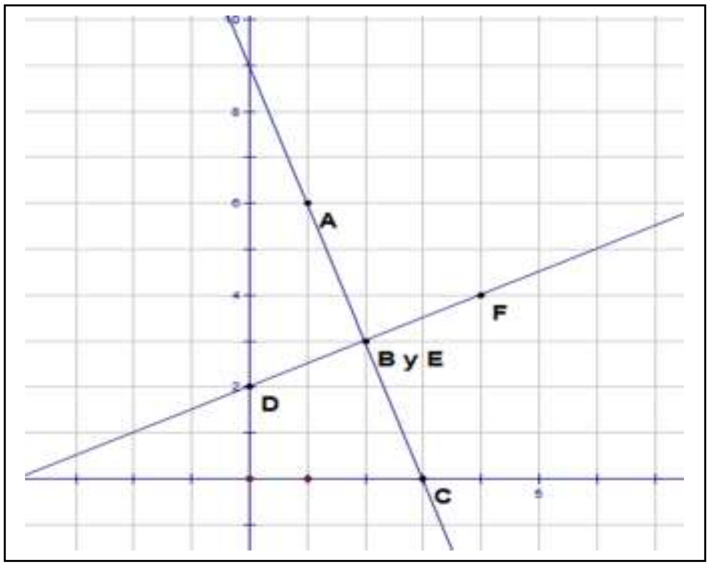
X	$y=9-3x$	**y**	**Puntos**
1	$y=9-3(1)=9-3=6$	6	A (1,6)
2	$y=9-3(2)=9-6=3$	3	**B (2,3)**
3	$y=9-3(3)=9-9=0$	0	C (3,0)

Valores obtenidos para la ecuación $x-2y=-4$.

X	$y=\frac{x+4}{2}$	**y**	**Puntos**
0	$y=\frac{0+4}{2}=\frac{4}{2}=2$	2	D (0,2)

2	$y=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$	3	E (2,3)
4	$y=\frac{4+4}{2}=\frac{8}{2}=4$	4	F (4,4)

Al analizar las tablas 5 y 6 se observa que existe un punto en común, en la primera tabla es el punto B (2,3) y en la segunda es el punto E (2,3). Este punto es la solución del sistema y es único, por lo tanto el sistema es compatible. A continuación se grafican ambas ecuaciones para encontrar la solución.



Solución gráfica del sistema de ecuaciones del ejemplo 3.

A continuación se realiza la comprobación partiendo de las ecuaciones que integran el sistema:

$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

Se sabe que la solución del sistema es:

$$x=2$$
$$y=3$$

Sustituyendo los valores anteriores en ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} 3(2)+3=9 \\ 2-2(3)=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6+3=9 \\ 2-6=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9=9 \\ -4=-4 \end{cases}$$

Se observa que la igualdad persiste en ambos miembros de las ecuaciones del sistema, por lo tanto la solución es correcta.

Ejemplo 4

Encontrar gráficamente la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Nuevamente se grafica cada una de las ecuaciones del sistema, despejando alguna de las incógnitas en ambas ecuaciones, a continuación se dan valores a la incógnita que no se despejó y se obtienen los valores de la incógnita despejada.
Se despeja a la incógnita y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 8 - 2x \\ y = 8 - 2x \end{cases}$$

Desde este despeje nos damos cuenta que las ecuaciones son equivalentes, y que lo tanto es un sistema compatible integrado por ecuaciones equivalentes y tendrá infinidad de soluciones. Sin embargo, resolveremos el sistema mediante tablas y gráfica.
Se dan valores a la incógnita x para obtener los valores de la incógnita y.

Valores obtenidos para la ecuación $2x + y = 8$.

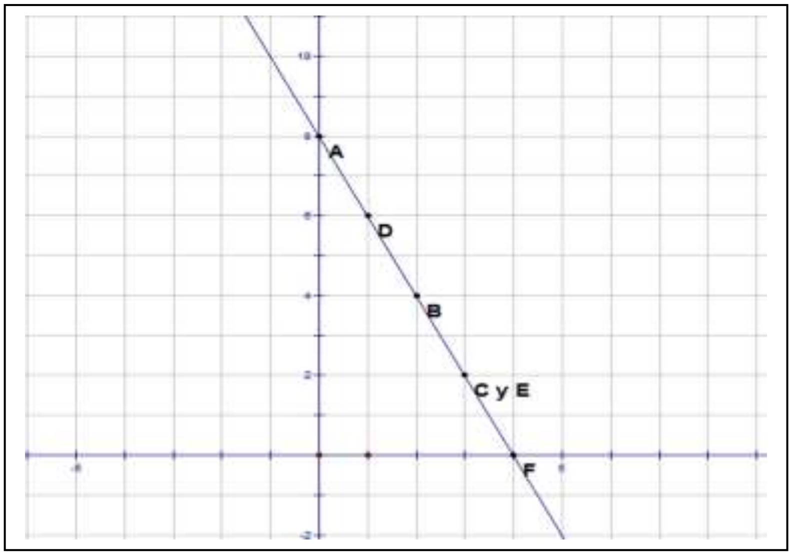
x	$y = 8 - 2x$	**y**	**Puntos**
0	$y = 8 - 2(0) = 8 - 0 = 8$	8	A (0,8)
2	$y = 8 - 2(2) = 8 - 4 = 4$	4	B (2,4)
3	$y = 8 - 2(3) = 8 - 6 = 2$	2	**C (3,2)**

Valores obtenidos para la ecuación $4x + 2y = 16$.

x	$y = \frac{16 - 4x}{2}$	**y**	**Puntos**
1	$y = \frac{16 - 4(1)}{2} = \frac{16 - 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$	6	D (1,6)

3	$y=\frac{16-4(3)}{2}=\frac{16-12}{2}=\frac{4}{2}=2$	2	**E (3,2)**
4	$y=\frac{16-4(4)}{2}=\frac{16-16}{2}=\frac{0}{2}=0$	0	F (4,0)

En las tablas anteriores se observa que existe un punto en común, el C (3,2) en la primera tabla y el E (3,2) en la segunda tabla, se podría inferir que se trata de la solución del sistema de ecuaciones; sin embargo, es necesario graficar para observar lo que sucede:



Solución gráfica del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.

Se observa que a pesar de que aparentemente existe un punto en común, los puntos están alineados; es decir, las líneas se encuentran una sobre la otra, coinciden, esto ocurre cuando se trata de un sistema de ecuaciones equivalentes; es decir, una se obtiene a partir de la otra, la ecuación 4x + 2y = 16 se obtuvo multiplicando por 2 la ecuación 2x + y = 8.

En este caso se tiene un número infinito de soluciones posibles. Debido a que el sistema de ecuaciones anterior está integrado por ecuaciones equivalentes y que por lo tanto tiene un número infinito de soluciones posibles, la comprobación de la solución de este sistema consistirá en verificar que dos o más parejas ordenadas satisfacen a ambas ecuaciones.

El sistema de ecuaciones del ejemplo está constituido por:

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ 4x+2y=16 \end{cases}$$

Se prueba primero con el punto que parecía ser la solución del sistema cuyos valores son:

$$x = 3$$
$$y = 2$$

Sustituyendo los valores anteriores en ambas ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} 2(3) + 2 = 8 \\ 4(3) + 2(2) = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 + 2 = 8 \\ 12 + 4 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 = 8 \\ 16 = 16 \end{cases}$$

Efectivamente se conserva la igualdad en ambos miembros de las ecuaciones, pero si ahora se sustituye algún otro valor de las tablas 7 y 8 se podrá comprobar que también se conserva dicha igualdad.

Se prueba ahora con el punto B (2,4) de la tabla 7, cuyas coordenadas son:

$$x = 2$$
$$y = 4$$

Sustituyendo en ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} 2(2) + 4 = 8 \\ 4(2) + 2(4) = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 4 = 8 \\ 8 + 8 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 = 8 \\ 16 = 16 \end{cases}$$

Nuevamente se conservó la igualdad en ambos miembros de las ecuaciones y lo mismo sucederá si se continúa utilizando los demás puntos de las tablas 5 y 6, porque todos estos puntos son soluciones del sistema; es decir, el sistema es equivalente y tiene infinidad de soluciones.

Ejemplo 5

Encontrar gráficamente la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

Igual que en los ejemplos anteriores, se grafica cada una de las ecuaciones del sistema, se despeja alguna de las incógnitas en ambas ecuaciones, se dan valores a la incógnita que no se despejó y se obtienen los valores de la incógnita despejada.

Se despeja a la incógnita y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-5}{2} \\ y = \dfrac{3x-7}{2} \end{cases}$$

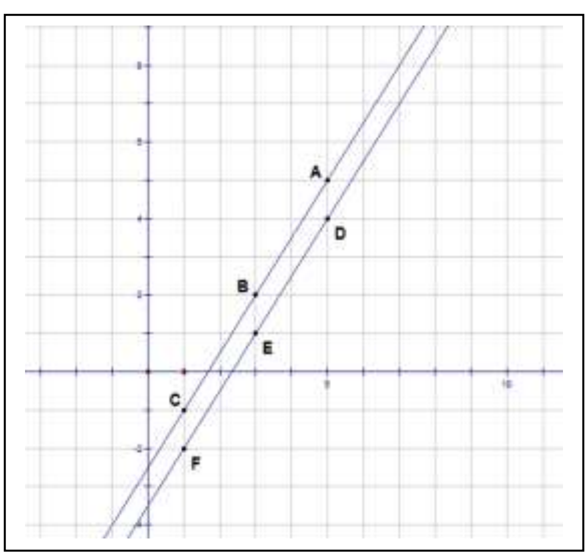
Valores obtenidos para la ecuación $3x - 2y = 5$**.**

x	$y = \frac{3x-5}{2}$	**y**	**Puntos**
5	$y = \frac{3(5)-5}{2} = \frac{15-5}{2} = \frac{10}{2} = 5$	5	A (5,5)
3	$y = \frac{3(3)-5}{2} = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$	2	B (3,2)
1	$y = \frac{3(1)-5}{2} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$	-1	C (1,-1)

Valores obtenidos para la ecuación $3x - 2y = 7$ **.**

x	$y = \frac{3x-7}{2}$	**y**	**Puntos**
5	$y = \frac{3(5)-7}{2} = \frac{15-7}{2} = \frac{8}{2} = 4$	4	D (5,4)
3	$y = \frac{3(3)-7}{2} = \frac{9-7}{2} = \frac{2}{2} = 1$	1	E (3,1)
1	$y = \frac{3(1)-7}{2} = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$	-2	F (1,-2)

Al analizar las tablas 9 y 10, aparentemente no existe ningún punto en común entre ambas; sin embargo, es conveniente analizar la gráfica para entender lo que sucede.



Solución gráfica del sistema de ecuaciones del ejemplo 5.

Se observa que no existe intersección entre ambas líneas, porque son líneas paralelas, el ejemplo corresponde a un sistema de ecuaciones incompatibles y no existe solución.

Al no existir solución en el sistema no puede realizarse ninguna comprobación.

Ejercicios

Encontrar gráficamente la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones e indicar si se trata de un sistema compatible o incompatible.

1. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x + y = -7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

Respuestas

1. x = 1 y = -2
2. Soluciones infinitas
3. x = 1 y = 2
4. x = 0 y = - 3/2
5. No tiene solución

Ejercicios

Resolver los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones y utilizando el método gráfico.

1. Una señora fue al supermercado y compró 5 kilos de manzanas y 1 kilo de azúcar para preparar un postre y pagó $128.00. Al llegar a su casa se dio cuenta que le faltaban ingredientes, por lo que regresó al supermercado y compró 1 ½ de manzanas y ½ kilo de azúcar y pagó $42.00. ¿Cuánto le costó el kilo de manzanas y el kilo de azúcar?

2. Un parquímetro contiene monedas de 5 y 10 pesos que suman $605, si en total contiene 89 monedas ¿Cuántas hay de cada tipo?

3. Un artesano tiene dos aleaciones, una de las cuales contiene 35% de plata y otra de 60% ¿Cuánto debe fundir de cada aleación para obtener 100 gramos de una aleación con 50% de plata?

4. Si una sala tuviera 1 metro más de largo y 1 metro más de ancho el área sería 26 m^2 más grande de lo que es ahora. Y si tuviera 3 metros menos de largo y 2 metros más de ancho el área sería 19 m^2 más grande de lo que es ahora. Hallar las dimensiones de la sala.

5. Una tripulación rema 28 km en 1 ¾ horas río abajo y 24 km en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad del bote en aguas tranquilas y la velocidad del río.

Respuestas

1. $ 22.00 kilo de manzanas y $ 18.00 kilo de azúcar.
2. 57 monedas de 5 pesos y 32 monedas de 10 pesos.
3. 40 gramos al 35% de plata y 60 gramos al 60% de plata.
4. Largo 20 metros y ancho 5 metros.
5. Velocidad del bote 12 Km/hora y velocidad del río 4 km/hora.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución consiste en sustituir una incógnita despejada, de una de las ecuaciones, en la otra ecuación, con e objetivo de encontrar los valores de las incógnitas.

Ejemplo.

Resuelve por el método de sustitución:

$$2x+y=-10....(I)$$
$$x-3y=2....(II)$$

1. De la ecuación II, despeja la variable x:

$$x=3y+2...(III)$$

2. Sustituye $x=3y+2$ en la ecuación I:

$$2(3y+2)+y=-10$$

3. Aplicamos la propiedad distributiva para eliminar el paréntesis

$$6y+4+y=-10$$

4. Agrupa términos semejantes

$$7y=-10-4$$

5. Despeja y

$$y=\frac{-14}{7}$$
$$\therefore y=-2$$

6. Sustituye $\therefore y=-2$ en la ecuación III para encontrar el valor de la variable x

$$x=3(-2)+2$$
$$x=-6+2$$
$$\therefore x=-4$$

7. Comprobamos en las ecuaciones I y II los valores obtenidos de $x=-4$ y $y=-2$

Comprobamos en I:

$$2(-4)+(-2)=-10$$
$$-8-2=-10$$
$$-10=-10$$

Comprobamos en II:

$$(-4)-3(-2)=2$$
$$-4+6=2$$
$$2=2$$

EJERCICIOS DE SISTEMAS DE 2X2:

Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

1. $2m-5n=14$ $5m+2n=-23$ Respuesta: $m=-3$ $n=-4$	2. $6r-5t=-11$ $7t-8r=15$ Respuesta: $r=-1$ $t=1$
3. $9x-2y=-3$ $7y-12x=17$ Respuesta: $x=\frac{1}{3}$ $y=3$	4. $8p-3q=8$ $2p+9q=15$ Respuesta: $p=\frac{3}{2}$ $q=\frac{4}{3}$
5. $3x-4y=32$ $5x+y=38$ Respuesta: $x=8$ $y=-2$	6. $7p-3q=-28$ $5q-4p=16$ Respuesta: $p=-4$ $q=0$

MÉTODO DE IGUALACIÓN.

El método de igualación consiste en despejar una de las dos variables en cada una de las dos ecuaciones. Estableciendo una igualdad como se muestra a continuación:

$$x_1 = x_2 \quad \text{o} \quad y_1 = y_2$$

Ejemplos:

$$x + y = 10$$
$$x + 3y = 18$$

Despejamos la variable *x* por ser la más sencilla

$$x + y = 10 - - - - - - - - -(1)$$
$$x + 3y = 18 - - - - - - - - -(2)$$

De la ecuación 1 tenemos:

$$x_1 = 10 - y$$

De la ecuación 2 tenemos:

$$x_2 = 18 - 3y$$

Se establece la igualdad:

$$10 - y = 18 - 3y$$

Se resuelve la ecuación y se tiene:

$$-y + 3y = 18 - 10$$
$$2y = 8$$
$$y = \frac{8}{2}$$
$$y = 4$$

Se calcula el valor de *x* sustituyendo el valor de y en la ecuación 1:

$$x = 10 - 4$$
$$x = 6$$

La solución al sistema es:

$$y = 4$$
$$x = 6$$

2. Resuelve el sistema:

$$2(x-2y)=1$$
$$\frac{x-3y}{2}+1=-1$$

Cuando se presenta un sistema de esta forma es necesario primero eliminar paréntesis y denominadores, y como se mencionó anteriormente despejar una de las variables.

La primera ecuación se pasa a la forma cartesiana

$$2(x-2y)=1$$
$$2x-4y=1-------(1)$$

La segunda ecuación también es convertida a la forma cartesiana

$$\frac{x-3y}{2}+1=-1$$
$$\frac{x-3y}{2}=-1-1$$
$$\frac{x-3y}{2}=-2$$
$$x-3y=(2)(-2)$$
$$x-3y=-4------(2)$$

El sistema se reescribe.

$$2x-4y=1-------(1)$$
$$x-3y=-4-------(2)$$

Se despeja la variable *x* por ser la más sencilla de despejar:

$$2x=1+4y$$
$$x=\frac{1+4y}{2}$$
$$x_1=\frac{1+4y}{2}-------(1)$$
$$x_2=-4+3y------(2)$$

Se establece la igualdad y se tiene:

$$\frac{1+4y}{2}=-4+3y$$

Se resuelve la ecuación.

$$1+4y=2\left(-4+3y\right)$$
$$1+4y=-8+6y$$
$$4y-6y=-8-1$$
$$-2y=-9$$
$$y=\frac{-9}{-2}$$
$$y=\frac{9}{2}$$

Ahora se determina el valor de *x* en la ecuación 2.

$$x_2=-4+3\left(\frac{9}{2}\right)$$
$$x_2=-4+\frac{27}{2}$$
$$x_2=-\frac{8}{2}+\frac{27}{2}$$
$$x=\frac{19}{2}$$

La solución del sistema de ecuaciones es:

$$x=\frac{19}{2}$$
$$y=\frac{9}{2}$$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación

1.	$4x-3y=2$ $5x=15$	$x=3$ $y=\frac{10}{3}$	**6.**	$2x+y=44$ $6x+2y=124$	$x=18$ $y=8$
2.	$3x-2y=-4$ $4x-y=3$	$x=2$ $y=5$	**7.**	$x=y+21$ $2x+10=y+5$	$x=-26$ $y=-47$
3.	$2x+3y=6$ $4x+6y=12$	Número infinito de soluciones	**8.**	$x+y=300$ $20x+30y=8000$	$x=100$ $y=200$
4.	$x+y=2$ $x+y=8$	No tiene solución	**9.**	$x+y=36$ $x-y=4$	$x=20$ $y=16$
5.	$2x+3y=16$ $4x-y=-3$	$x=\frac{1}{2}$ $y=5$	**10.**	$x=y+21$ $x+5=2y+10$	$x=37$ $y=16$

MÉTODO DE REDUCCIÓN (SUMA Y RESTA).

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x+y=6 \cdots Ec1 \\ x-y=-8 \cdots Ec2 \end{cases}$$

1) Acomoda ambas ecuaciones de la forma $ax+by=c$
2) Se busca que al sumar las ecuaciones alguna de las incógnitas se elimine, en el ejemplo, al sumar las ecuaciones, se elimina y

$$\text{Sumar } Ec1+Ec2$$

$$\begin{array}{r} x+y=6 \\ x-y=-8 \\ \hline 2x+0=-2 \end{array}$$

$$2x=-2$$

$$x=\frac{-2}{2}$$

$$x=-1$$

3) Sustituimos el valor de x en cualquiera de las Ecuaciones iniciales

$$\text{Sustituir } x \text{ en } Ec1$$

$$x+y=6$$

$$-1+y=6$$

$$y=6+1$$

$$y=7$$

$$\text{Solución } x=-1, y=7$$

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \cdots Ec1 \\ 4x-y=-3 \cdots Ec2 \end{cases}$$

1) Acomoda ambas ecuaciones de la forma $ax+by=c$
2) Se busca que al sumar las ecuaciones alguna de las incógnitas se elimine, en el ejemplo, al sumar las ecuaciones, no se elimina ninguna incógnita

$$\text{Sumar } Ec1+Ec2$$

$$\begin{array}{r} 2x+3y=16 \\ 4x-y=-3 \\ \hline 6x+2y=13 \end{array}$$

3) Si nos enfocamos en la incógnita y, debemos multiplicar a cada elemento de la $Ec2$ por 3 para eliminarla

$$\begin{array}{l} \text{Sumar } Ec1+3Ec2 \\ \ \ 2x+3y=16 \\ \underline{12x-3y=-9} \\ \ \ 14x+0=7 \end{array}$$

$$14x=7$$

$$x=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

4) Sustituimos el valor de x en cualquiera de las Ecuaciones iniciales

$$\begin{array}{l} \text{Sustituir } x \text{ en } Ec2 \\ 4x-y=-3 \\ 4\left(\frac{1}{2}\right)-y=-3 \\ \frac{4}{2}-y=-3 \\ 2-y=-3 \\ -y=-3-2 \\ -y=-5 \\ y=5 \\ \text{Solución } x=\frac{1}{2}, y=5 \end{array}$$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 3x-4y=13\cdots Ec1 \\ 8x-5y=-5\cdots Ec2 \end{cases}$$

1) Acomoda ambas ecuaciones de la forma $ax+by=c$
2) Se busca que, al sumar las ecuaciones, alguna de las incógnitas se elimine. En el ejemplo, al sumar las ecuaciones, no se elimina ninguna incógnita

$$\begin{array}{l} Sumar \cdot Ec1+Ec2 \\ 3x-4y=13 \\ \underline{8x-5y=-5} \\ 11x-9y=8 \end{array}$$

3) Si nos enfocamos en la incógnita x, no existe un número Entero que multiplicado por la $Ec2$ arroje como resultado el $-3x$ que se requiere o un número Entero que multiplicado por la $Ec1$ arroje como resultado el $-8x$ que se necesita, pero si podemos afectar a ambas ecuaciones y llevarlas a un número en el que coincidan ambas ecuaciones.

$$\text{Sumar } -8Ec1+3Ec2$$

$$\begin{array}{l} -24x+32y=-104 \\ \underline{24x-15y=-15} \\ 0+17y=-119 \end{array}$$

$$17y=-119$$

$$y=\frac{-119}{17}=-7$$

4) Sustituimos el valor de y en cualquiera de las Ecuaciones iniciales

$$\text{Sustituir } y \text{ en } Ec1$$

$$3x-4y=13$$

$$3x-4(-7)=13$$

$$3x+28=13$$

$$3x=13-28$$

$$3x=-15$$

$$x=\frac{-15}{3}=-5$$

$$\textit{Solución } x=-5, y=-7$$

Resuelve los siguientes ejercicios por el método de reducción.

1) $\begin{cases} 3x-2y=-4 \\ 4x-y=3 \end{cases}$

Solución $x=2, y=5$

2) $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ -3x+7y=-22 \end{cases}$

Solución $x=-2, y=-4$

3) $\begin{cases} 6x-5y=-9 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$

Solución $x=1,\ y=3$

4) $\begin{cases} 15x+11y=32 \\ -9x+7y=8 \end{cases}$

Solución $x=\frac{2}{3},\ y=2$

5) $\begin{cases} 10x+18y=-11 \\ 16x-9y=-5 \end{cases}$

Solución $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{3}$

SISTEMAS DE ECUACIONES 3X3

METODO DE REDUCCION.

Resuelve por el método de reducción o suma y resta:

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 16 \ldots.(I) \\ x - 6y + 2z &= -9 \ldots.(II) \\ 3x + 4y - z &= 32 \quad (III) \end{aligned}$$

1. Multiplicamos la ecuación II por (-2) sumándola a la ecuación I, para eliminar la variable x.

$$\begin{array}{r} 2x - y + 5z = 16 \\ -2x + 12y - 4z = 18 \\ \hline 11y + z = 34 \ldots..(IV) \end{array}$$

2. Multiplicamos la ecuación II por (-3) sumándola a la ecuación III, para eliminar la variable x.

$$\begin{array}{r} -3x + 18y - 6z = 27 \\ 3x + 4y - z = 32 \\ \hline 22y - 7z = 59 \ldots(V) \end{array}$$

3. Multiplicamos la ecuación IV por (7) sumándola a la ecuación V para eliminar la variable z.

$$\begin{array}{r} 77y + 7z = 238 \\ 22y - 7z = 59 \\ \hline 99y = 297 \end{array}$$

4. Despejamos y:

$$y = \frac{297}{99}$$
$$y = 3$$

5. Sustituimos y=3 en la ecuación IV para determinar z:

$$
\begin{aligned}
11(3)+z&=34\\
33+z&=34\\
z&=34-33\\
z&=1
\end{aligned}
$$

6. Sustituimos y=3, z=1 en la ecuación II para determinar x:

$$
\begin{aligned}
x-6(3)+2(1)&=-9\\
x-18+2&=-9\\
x-16&=-9\\
x&=-9+16\\
x&=7
\end{aligned}
$$

7. Comprobamos en las ecuaciones I, II, III los valores obtén idos de

$$x=7,\ y=3,\ z=1:$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Comprobamos en } I:\\
&2(7)-3+5(1)=16\\
&14-3+5=16\\
&11+5=16\\
&16=16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Comprobamos en } II:\\
&7-6(3)+2(1)=-9\\
&7-18+2=-9\\
&-11+2=-9\\
&-9=-9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Comprobamos en } III:\\
&3(7)+4(3)-1=32\\
&21+12-1=32\\
&33-1=32\\
&32=32
\end{aligned}
$$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones 3x3 por el método reducción o de suma y resta.

1. $d - e - 4f = -4$
$2d + 2e + f = 11$
$d + e + 3f = 13$

$\text{Re}\,spuesta:$
$d = 6$
$e = -2$
$f = 3$

2. $x - 2y + 3z = 10$
$2x + y - 6z = 1$
$4x - 2y - 9z = 15$

$\text{Re}\,spuesta:$
$x = 3$
$y = -3$
$z = 1/3$

3. $3x + 5y - z = 4$
$10y - 6x - 3z = 1$
$4z - 15y + 9x = -1$

$\text{Re}\,spuesta:$
$x = 2/3$
$y = 1/5$
$z = -1$

4. $4n - 2m - 3r = 1$
$m + 3n - 5r = -4$
$3m - 5n + r = 0$
$m = -3$
$n = -2$
$r = -1$

5. $3x - 2y + z = 16$

$2x + 3y - 8z = 2$

$x - y + 3z = 14$

Respuesta:

$x = 8$

$y = 6$

$z = 4$

BIBLIOGRAFíA

1. **BALDOR, A.** (1985). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural.
2. **BARNETT** R. (1988), Álgebra y trigonometría. Segunda Edición. Mc. Graw-Hill.
3. **BARNETT ZIEGLER Y BYLEEN.** Álgebra. Sexta edición. Mc. Graw-Hill. 2000.
4. **BOCH, C.** (1997) Álgebra Universitaria. Atlántida Méx.
5. **BRITO, J y BELLO**. (1982). Matemáticas contemporáneas. Harla.
6. **CABALLERO, A., MARTÍNEZ, L. Y BERNARDEZ, J**. (1967). *Matemáticas, segundo curso* . (7ma.ed.). México: Editorial Esfinge, S. A.
7. **CHARLES D. MILLER**. Et al. Matemática: Razonamiento y Aplicaciones. Addison Wesley Longman. México. 1999
8. **EDUARDO CARPINTEYRO**, Álgebra. Publicaciones Cultural., Méx. 2002
9. **GOBRAN, A.** Álgebra elemental. Grupo Editorial Iberoamericana 1990.
10. **F. J. ORTIZ CAMPOS**. (1990). Matemáticas- 2 GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA. Publicaciones Cultural.México D. F.
11. **LARSON, H** (1996). Álgebra Universitaria. Publicaciones Cultural.
12. **LOVAGLIA.** (1981). Álgebra, Harla. México.
13. **MILLER D. ET AL.** (1999) Álgebra elemental. Addison Wesley Longman.
14. **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS**. (1980) Números Irracionales. Trillas. México.
15. **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS**. (1982) Números Naturales. Trillas. México.
16. **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS**. (1981) Números Racionales. Trillas. México.
17. **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.** (1981) Números Reales. Trillas. México.
18. **NEWMAN, JAMES.** (1997) El Mundo de las Matemáticas. Vol. 4. Grijalvo. Barcelona, España.
19. **ELENA DE OTEYZA** et al. (2006) Álgebra. COLECCIÓN CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES. PEARSON/Educación. UNAM.
20. **REES/SPARKS**. (1995). Álgebra Contemporánea. Mc Graw-Hill.

21. **SMITH, A.S. ET AL.** (1998). Álgebra y trigonometría y geometría analítica. Addison Wesley Longman.

22. **SMITH.** (1992). Álgebra. Addison Wesley.

23. **SWOKOWSKI, E.** (1998). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (2da. ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

24. www.bunam.unam/moodle/vinculacion/matematicasI

25. **LANDA OROZCO E. /ZARAGOZA RAMÍREZ. J. G.** et. al. (2004). Paquete Didáctico de Matemáticas I. CCH-NAUCALPAN. UNAM. México.