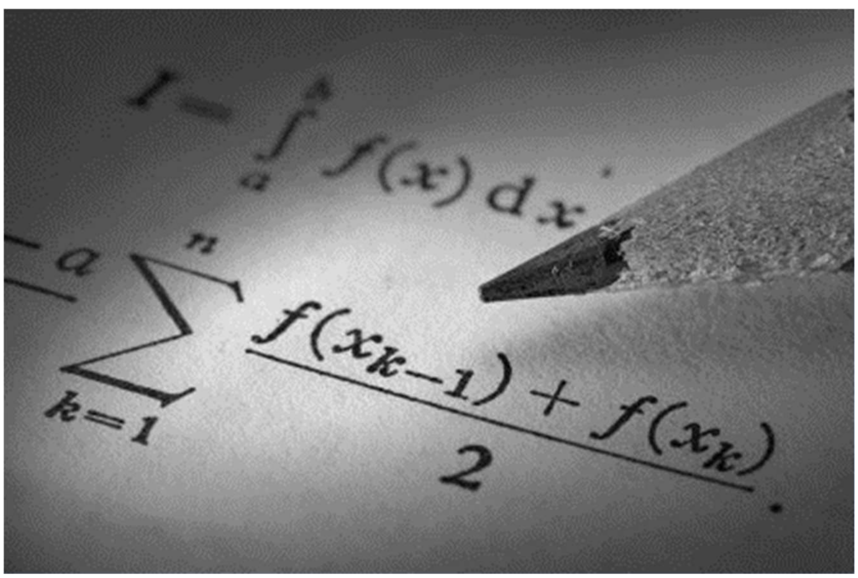
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL NAUCALPAN

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I



JUAN CARLOS RAMIREZ MACIEL

Abril del 2019

Contenido

Introducción

Este texto ha sido desarrollado como apoyo tanto al docente como al estudiante para el desarrollo del curso de Cálculo Diferencial e Integral I que se imparte en el Colegio, dicha asignatura se encuentra ubicada en el plan de estudios 2016 en el quinto semestre.

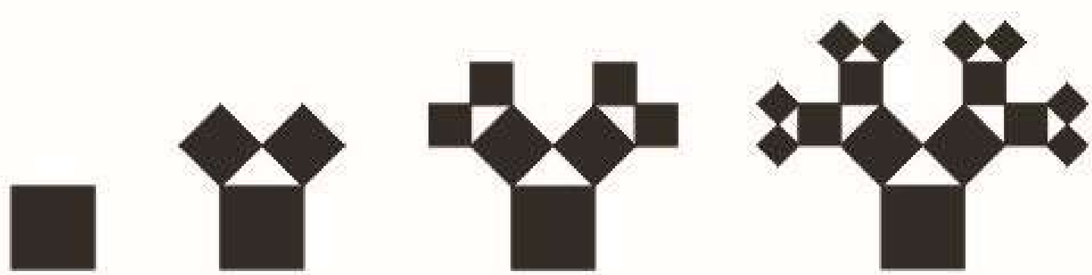
Este material se desarrolla en cuatro unidades contempladas dentro del plan de estudios vigente del Colegio de Ciencias y Humanidades. Para lograr los propósitos y objetivos cada una de las unidades inica con una breve introducción a las temáticas y conceptos tal y como están propuestas en el programa indicativo, seguido por una serie de problemas resueltos detalladamente para ayudar a los aprendizajes de los estudiantes, finalmente contiene un espacio de trabajo con ejercicios propuestos para que los estudiantes plasmen sus aprendizajes. Cabe mencionar que el centro de la didáctica del presente está basado en la Resolución de Problemas y cuyo objetivo es lograr la consolidación de los conceptos y procedimientos requeridos para la comprensión del Cálculo Diferencial por los estudiantes.

Un principio fundamental que se sustenta en la resolución de problemas es concebir a las matemáticas a través de preguntas que se abordan y resuelven a partir de una forma de pensar que involucra que el estudiante emplee recursos, estrategias y hábitos consistentes con la práctica o desarrollo del conocimiento matemático, da la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que van desde los ejercicios hasta los problemas abiertos y situaciones de exploración, lo cual considero que debería preparar a los estudiantes para aprender a aprender, aprender a hacer.

Dr. Juan Carlos Ramírez Maciel

Unidad 1

Procesos Infinitos y la Noción de Límite

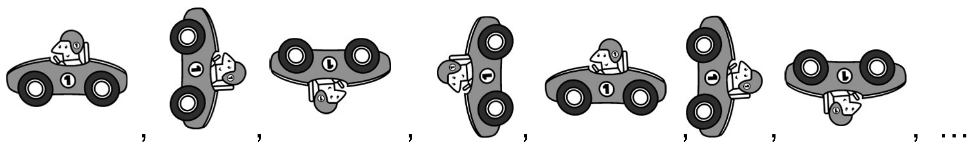


Objetivos Específicos:

- Reconocerá las características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, algebraico o gráfico.
- Identificará los patrones de comportamiento en un proceso infinito.
- Resolverá problemas en diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos.
- Expresará simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe.
- Identificará cuál es el resultado límite de un proceso infinito.
- Establecerá el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica.

1.1 Sucesión

Un proceso infinito es aquel que se repite realizando la misma acción u operación de manera iterada una infinidad de veces, por ejemplo, si tenemos una imagen y la rotamos 90° en sentido de las manecillas del reloj en el cuarto proceso vuelve a su posición inicial, este proceso lo podemos hacer de manera iterada una infinidad de veces.



La representación anterior se denomina sucesión, donde cada término o elemento de la sucesión, en este caso, corresponde con una posición de la imagen.

En forma general, en matemáticas una sucesión $\{a_n\}$ es considerada como un conjunto de números escritos en un orden definido. De manera formal una sucesión puede definirse como una función de los números naturales cuyo rango es un conjunto **A** cualquiera de los números reales.

$$f: \{1,2,3,4,5,\dots\} \rightarrow \mathbf{A}$$

Ejemplo 1

El siguiente conjunto de números forma una sucesión:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

De manera iterada se va aumentando el valor del denominador en una unidad, en esta sucesión cada término se puede expresar a través de una función como:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad con\ n = 1,2,3,4,\dots$$

Dicha expresión nos permite predecir el valor que tendrá algún elemento de la sucesión, por ejemplo, el elemento 30 de la sucesión será:

$$a_{30} = \frac{1}{30}$$

Ejemplo 2

La sucesión:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots\right\}$$

De manera iterada el denominador aumenta de manera que cada término se pude expresar mediante una función como:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad con\; n = 1,2,3,4,5, \dots$$

Así el elemento 13 de la sucesión será:

$$a_{13} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

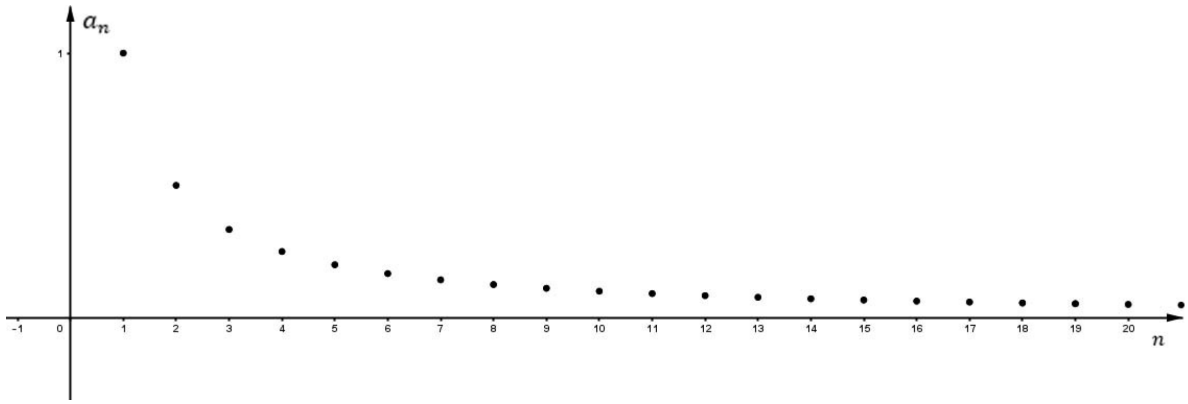
Se deja al lector responder la siguiente pregunta: ¿Cuál será el elemento 16 de la sucesión?

1.1.2 límite de una sucesión

Consideremos que cada elemento de una sucesión es generado por la siguiente relación:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad con\; n = 1,2,3,4, \dots$$

para poder visualizar y poder entender de mejor manera el comportamiento de la sucesión grafiquemos las parejas (n, a_n) como se muestra en la figura:



Como se pude observar los términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ se hacen pequeños a medida que el valor de n se hace grande, de hecho, los términos serán tan pequeños que se considera que tienden a cero conforme los valores de n son suficientemente grandes.

En otras palabras, el valor límite de los elementos de la sucesión a_n cuando n tiende a infinito es cero, esto se indica de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En forma general, si los términos a_n de una sucesión se aproximan a un valor L cuando n se aproxima al infinito el valor límite de esta sucesión será L.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

1.2.3 Convergencia de una serie.

El límite anterior puede existir o no, en caso de que este valor límite si exista se dice que la serie s_n **converge** en caso de que no se pueda obtener un valor se dice que la serie **diverge**.

En otras palabras, una serie es convergente si:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = l$$

Siendo l el valor finito al que tiende la serie cuando el valor de n tiende a infinito.

En caso de que estuviéramos interesados en sumar los enteros positivos

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \ldots \ldots \ldots . n$$

Observaríamos que la suma no tiene un valor límite, ya que el valor de la suma se va incrementando de manera infinita, por lo que ésta serie sería divergente.

En otras palabras, una serie es divergente si:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \nexists$$

sí estamos interesados en conocer la suma de n términos esta sería:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{1}{2^n}$$

A esta expresión se le conoce como serie geométrica.

Observemos que los términos sucesivos de la serie de aproximan a cero, lo cual significa que la sumatoria será finita, esto es, es posible obtener un valor numérico para la suma.

Lo anterior queda más claro si se expresa en términos de la razón común r, la cual nos permite decidir si la sumatoria es finita o no.

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

En este caso el valor de la razón común es $r = \frac{1}{2}$.

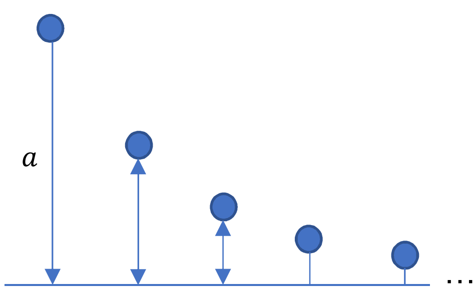
El comportamiento que tiene la serie dependerá de la razón común r**:**

1. Si el valor de r esta entre menos uno y uno $-1 < r < 1$ o bien $|r| < 1$ se dice que la serie converge. Esto es porque los términos de la serie van a tender a cero y es posible obtener un valor finito.

Si el valor de r es más grande que uno o más grande que el valor absoluto de menos uno $|r| > 1$. Se dice que la serie diverge. Esto se debe a que los términos también aumentarán por lo cual no es posible obtener un valor finito de ella.

1.2 Situaciones que dan lugar a procesos infinitos

Imaginemos que tenemos una pelota a cierta altura del suelo, la cual dejamos caer y rebota varias veces de manera vertical, en su primer rebote contra el suelo llega a la mitad de la altura inicial, en el segundo nuevamente alcanza la mitad del rebote anterior y continua este proceso de manera sucesiva, sería de interés saber la cantidad que ha recorrido la pelota, para ello veamos cómo sería de sucesión de esta situación.



El primer momento seria cuando cae a unidades, el segundo sería $\frac{a}{2}$, el tercero $\frac{a}{4}$ y así sucesivamente por lo que es claro que esta sucesión seria:

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}, \frac{a}{32}, \frac{a}{64} \cdots$$

Para conocer la distancia recorrida por la pelota es necesario sumar cada uno de los elementos de esta sucesión dos veces, debido a que la pelota sube y después baja.

$$d_{recorrida} = s_n = a + \frac{2a}{2} + \frac{2a}{4} + \frac{2a}{8} + \frac{2a}{16} + \frac{2a}{32} + \cdots$$

Simplificando

$$d_{recorrida} = s_n = 2a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16} + \frac{a}{32} + \cdots$$

$$d_{recorrida} = s_n = a + a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\right)$$

A partir de ésta última expresión es posible contestar preguntas tales como:

¿Si la altura es de 2 metros y rebota 3 veces qué distancia recorrió la pelota?

Solución

$$d_{recorrida} = s_3 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 5.5m$$

En la primera vez que cae recorre $2m$, rebota por primera vez y sube $1m$ y baja $1m$ con lo que ha recorrido en este instante $4m$, en el segundo rebote sube $0.5m$ y baja $0.5m$ con lo cual ha recorrido $5m$, finalmente en el tercer rebote sube 0.25m y baja $0.25m$ para un total de $5.5m$.

De manera similar encontramos:

Rebotes	s_n	Distancia
1	$s_3 = 2 + 2(1)$	4m
2	$s_3 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	5m
3	$s_3 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$	5.5m

4	$s_4 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$	5.75m
5	$s_5 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)$	5.875m
6	$s_6 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)$	5.96875m
7	$s_7 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$	5.984375m
8	$s_7 = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right)$	5.9921875m

La última expresión de la distancia se puede también expresar de la siguiente manera:

$$d_{recorrida} = 2 + \sum_{n=1}^{n} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Esta expresión es la sumatoria de todos los términos la cual se denomina **serie** y se simboliza por la letra sigma (∑). Ésta es otra manera de expresar la sumatoria, para entender mejor supongamos que estamos interesados en conocer la distancia recorrida en el cuarto rebote, entonces:

$$d_{recorrida} = a + \sum_{n=0}^{4} a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = a + a\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)$$

Elevando las potencias de los paréntesis:

$$d_{recorrida} = a + a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

En el caso en el que $a = 2m$ tenemos:

$$d_{recorrida} = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 5.75m$$

1.2.1 Suma parcial de una serie

Como se ha comentado estamos interesados en conocer ¿Cómo se calcula la suma de los n términos de una serie geométrica? Para dar respuesta a esta pregunta consideremos la siguiente serie:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^3 \ldots\ldots + ar^{n-1} \quad con -1 < r < 1$$

Si multiplicamos esta serie por la razón común r

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots\ldots + ar^n$$

Si restamos ambas series obtendremos:

$$S_n - rS_n = a + \cancel{ar} - \cancel{ar} + \cancel{ar^2} - \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} - \cancel{ar^3} \ldots\ldots + \cancel{ar^{n-1}} - \cancel{ar^{n-1}} - ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

De esta expresión podemos factorizar y despejar el valor de la sumatoria:

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^3 \ldots\ldots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{(1 - r)}$$

Esta última expresión es usual expresarla mediante el símbolo sigma $\sum$ para indicar un proceso de suma.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{(1 - r)} \; con -1 < r < 1$$

Este resultado nos permite conocer el valor de la suma para algún valor de n en especial.

En particular en el cuarto rebote tendríamos:

$$d_{recorrida} = 2 + \sum_{n=0}^{n} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 + \sum_{n=0}^{n-1} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Si usamos el resultado encontrado

$$d_{recorrida} = 2 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2 + \frac{2-\frac{2}{16}}{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\frac{30}{16}}{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{30}{8} = \frac{46}{8} = 5.75m$$

Como ya sabíamos, como podemos notar la serie expresada en la notación sigma es una forma “compacta” de expresar la suma de todos los elementos de una sucesión.

De manera general:

Una sumatoria de n términos de la forma:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^3 \ldots \ldots + ar^{n-1}$$

Converge si $-1 < r < 1$ y el valor de dicha suma es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{(1-r)}$$

1.2.2 Procesos Infinitos

Una pregunta interesante sería intentar responder:

¿Cuál sería la distancia que la pelota recorrería si pudiera rebotar una infinidad de veces bajo las mismas condiciones?

Sabemos que la distancia recorrida en n-ésimo rebote está dado por la expresión

$$s_n = a + \sum_{n=0}^{3} a\left(\frac{1}{2}\right)^n = a + a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ \dots\dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Y estamos interesados en conocer el valor límite de esta suma si es que la pelota rebotara una infinidad de veces, si es que se pudiese obtener. En matemáticas este hecho se pude expresar como:

$$d_{recorrida} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

En esta expresión indica que estamos interesados en conocer el valor límite de la sucesión cuando la cantidad de rebotes "n" tiende a infinito, esto es, se toman valores de n cada vez más grandes.

1.2.3 Suma infinita de una serie

Es interesante notar que el proceso del rebote de una pelota que hemos venido trabajando se puede realizar en teoría una cantidad infinita de veces, por lo cual sería interesante conocer ¿Cuál es el valor límite de la suma?

Para ello consideremos que el valor de la razón común en la serie ***r*** tiene un valor $|r| < 1$, entonces, cuando n tiende a infinito ($n \to \infty$) el valor de la razón elevado a la potencia n como hemos visto tenderá a cero ($r^n \to 0$), en otras palabras, el valor límite de la suma será:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a - a\cancelto{0}{r^n}}{(1-r)}$$

Por lo anterior el valor límite de la suma en el infinito será:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{(1-r)}$$

Con esta herramienta podemos conocer la distancia que recorrería la pelota del ejemplo si rebotara una infinidad de veces, En ese caso la distancia recorrida sería

$$d_{recorrida} = a + \sum_{n=0}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Como podemos observar el valor de x es menor uno, por los que la serie converge a:

$$d_{recorrida} = a + \frac{a}{1-\frac{1}{2}}$$

$$d_{recorrida} = a + 2a = 3a$$

Por ejemplo, si la altura de la que cae es de 2m la distancia total que recorrería en el infinito sería de:

$$d_{recorrida} = 3(2m) = 6m$$

Es interesante notar que la tabla que habíamos realizado antes, nos sugería ya que la distancia recorrida se aproximaba al valor de seis metros. La convergencia de la serie geométrica nos permite conocer el valor en el límite al infinito.
En resumen:

Una serie geométrica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots ar^{n-1}$$

Dicha serie converge siempre que $-1 < r < 1$, siendo el valor de su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{(1-r)}$$

1.2.4 Ejemplos Resueltos

En esta sección se presentan algunos ejemplos de aplicación de las sucesiones y series geométricas.

Ejemplo 1

A una partícula que se mueve en línea recta, se le aplica una fuerza, de manera que cada segundo la partícula recorre la mitad de la distancia que ha recorrido en el segundo anterior. Si la partícula recorre 20cm en el primer segundo. ¿Qué distancia total recorrerá?

Solución

Nos dicen que la distancia disminuye la mitad por cada segundo, por lo que podemos expresarla distancia total que recorre como:

$$d_{total} = d_{inicial} + \frac{d_{inicial}}{2} + \frac{d_{inicial}}{4} + \frac{d_{inicial}}{8} + \frac{d_{inicial}}{16} + \frac{d_{inicial}}{32} + \cdots$$

Factorizando $d_{inicial}$ tenemos:

$$d_{total} = d_{inicial} + d_{inicial}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\right]$$

Esto se puede escribir como:

$$d_{total} = d_{inicial} + d_{inicial}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots\right]$$

O bien:

$$d_{total} = d_{inicial} + d_{inicial}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

En nuestro problema sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{(1-r)} \quad y \quad d_{inicial} = 20cm$$

$$d_{total} = 20 + 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 20 + 20\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 20 + 20 = 40cm$$

Ejemplo 2

Se deja caer una pelota de una altura de 10 metros, la cual rebota varias veces. En el primer rebote llega a las dos terceras parte de la altura inicial, en el segundo recorre la novena parte de la altura inicial, en el tercero rebota una veintisieteava parte, una ochentaiunava y así sucesivamente.

a) ¿Cuál será la distancia recorrida por la pelota después de 5 rebotes, si continua el mismo proceso?
b) ¿Cuál será la máxima distancia recorrida?

Solución:

a)

$$d_n = 10 + \frac{2}{3}(10) + \frac{2}{3^2}(10) + \frac{2}{3^3} + (10) + \frac{2}{3^4}(10) + \cdots \frac{2}{3^n}(10)$$

$$d_n = 10 + 2(10)\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right]$$

$$d_n = 10 + 20\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$d_n = 10 + 20\left[\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{1-\frac{1}{3}}\right]$$

$$d_5 = 10 + 20\left[\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}}\right] = 10 + 20\left(\frac{121}{243}\right) = \frac{4850}{243} = 19.9588m$$

b) En el límite cuando n tiende a infinito tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 10 + 20\left[\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\right] = 10 + 20\left[\frac{1}{2}\right] = 20m$$

Ejemplo 3

Expresa el número decimal periódico $0.7\overline{3}$ como una suma infinita y calcula su valor.

Solución

El número decimal periódico se puede escribir como:

$$0.7\overline{3} = 0.7 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \ 0.000003 \ldots$$

Otra forma de escribirlo es:

$$0.7\overline{3} = \frac{7}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^5 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^6 + \ \ldots$$

Factorizando la expresión $3\left(\frac{1}{10}\right)^2$ podemos escribir este número como:

$$0.7\overline{3} = \frac{7}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right)\left[\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \ \ldots\right]$$

En forma de sumatoria:

$$0.7\overline{3} = \frac{7}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right)\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{7}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)}$$

$$0.7\overline{3} = \frac{7}{10} + 3\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{10} + \frac{1}{30} = \frac{11}{15}$$

1.2.5 Ejercicios

1.2.5.1 Ejercicio

Consideremos que dividimos un cuadrado de un metro de lado a la mitad, como se muestra:

El área sombreada es igual a $A_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

Si se repite el proceso de dividir sobre la parte no sombreada.

El valor del área que se sombrea es: $A_2 =$. ____________

En el siguiente proceso el área será $A_3 =$______________

¿Cuáles son los elementos de la sucesión de ir dividiendo el rectángulo?:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{}, \frac{1}{}, \frac{1}{32}, \frac{}{} \dots\right\}$$

¿Cada término de la sucesión y que corresponde al valor del área se puede expresar de la siguiente manera?:

$$A_n = \frac{1}{2^n} \qquad con\ n = 1,2,3,4, \dots, n$$

Cierto______ Falso_______

¿Cuál es el valor total del área que se va sombreando? Para saberlo completa la tabla:

Proceso	Área Sombreada	
1	$\frac{1}{2}$	$0.5m^2$
2	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$0.75m^2$
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\ }$	
4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{\ }$	
5	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{\ }+\frac{1}{\ }$	$0.96875m^2$

Como puedes ver es un proceso muy laborioso, reescribamos la situación, la suma se puede escribir de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Es importante notar que esta serie se puede expresar de forma que podamos saber el valor de la suma

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a-ar^n}{(1-r)}$$

$a =$ ______ $r =$ _____:

Con estos valores, en el quinto proceso será

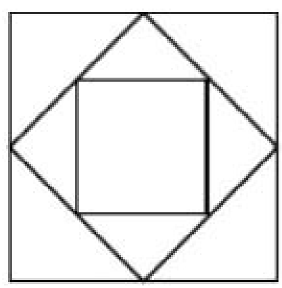
$$S_5 = \underline{\hspace{3cm}} = \frac{\frac{31}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{32} = 0.96875m^2$$

Como podemos observar este valor es el mismo que habíamos obtenido con anterioridad en la tabla que realizamos.

a) ¿Cuál será el área que se va sombreando en el proceso 10?
b) ¿Cuál será el área cuando el proceso se repite una infinidad de veces?

1.2.5.2 Ejercicios

a) En la figura siguiente cada nuevo cuadrado es inscrito en el anterior, de modo que sus vértices coinciden con los puntos medios de los lados del cuadrado anterior.



El lado del primer cuadrado mide 1m.

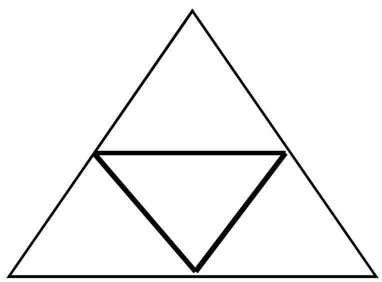
i) Calcula la suma de las primeras 7 áreas de los cuadrados.
ii) Calcula el valor que resultaría si se sumaran las áreas de todos los cuadrados posibles.

b) Demuestra que:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{4}{3}$$

c) Un conejo salta 3m, es su siguiente salto brinca la mitad de la cantidad, en siguiente intento nuevamente salta la mitad.
   i) ¿Cuál será la suma de los primeros 5 saltos?
   ii) Si el proceso continúa indefinidamente. ¿Cuál será la suma de las distancias recorridas?

d) Un triángulo equilátero es dividido de tal manera que en el punto medio de sus lados se forman triángulos equiláteros. Si este proceso se repite una infinidad de veces y siempre se quita el triángulo central ¿Cuál sería la suma de las áreas de todos los triángulos centrales que se han retirado? ¿Cuál es el área restante?



e) Convierte el número decimal periódico a su forma fraccional
   i) $3.\overline{1}6$
   ii) $2.\overline{3}$
   iii) $5.\overline{6}$
   iv) $0.\overline{123}$

1.3 Noción de Límite

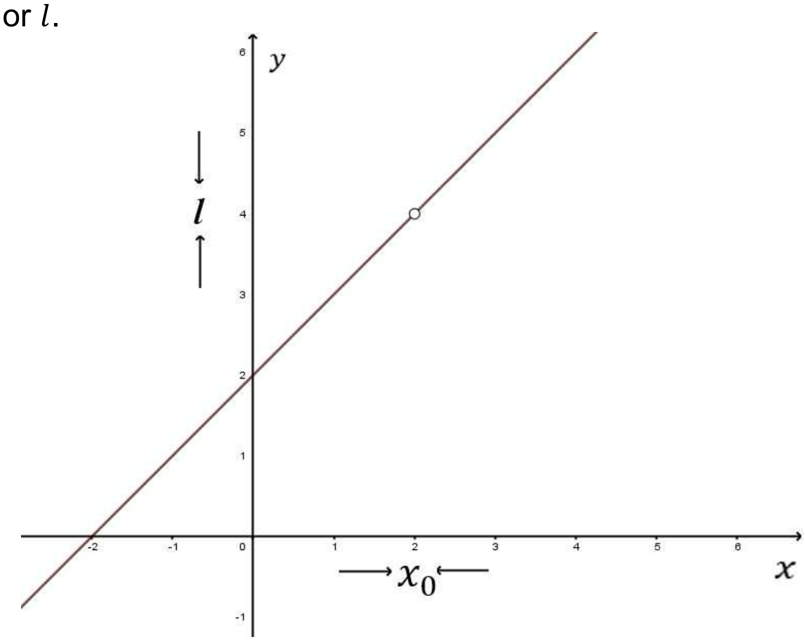
En la sección anterior observamos que es posible bajo algunas consideraciones conocer el valor límite de una sucesión y de una serie cuando los términos de estas tendían al infinito, la idea principal del límite es que éste nos permite considerar que nos podemos acercar tanto como deseemos a algún valor para ver su comportamiento.

Como mencionamos las series convergen si el valor de dichas series al tenderlas al infinito, se pueden aproximar a un valor finito l o bien pueden divergir si el valor también tiende al infinito.

En esencia la idea de límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un valor x_0 es que a medida que el valor de x se aproxima al valor de x_0, $f(x)$ se acerca a algún valor, esto es:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

En otras palabras, mientas más cerca esté x de x_0 el valo de la función f(x) está cerca del valor l.



Como podemos observar, en este ejemplo, en la gráfica de la función, cuando nos acercamos al número dos, la función se acerca o aproxima al valor del número cuatro, es decir:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Notemos que el acercamiento al valor a x_0 se hace por izquierda (x^-) y por la derecha (x^+), esto se hace para garantizar la existencia de dicho límite.

A estos límites se les conoce como límites se llaman límites laterales.

El límite

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

Indica que el valor limite cuando x se acerca a "a" por la izquierda es igual a l. Mientras que el límite:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Indica que el valor límite cuando x se acerca a "a" por la derecha es igual a l

1.3.1 Existencia de un límite

De manera general, **para que un límite exista los límites laterales tienen que aproximarse al mismo valor**:

Si el límite por la derecha y el límite por la izquierda de la función coinciden cuando $x \to a$, se dice que el límite de la función es L cuando x tiende o se acerca a "a".

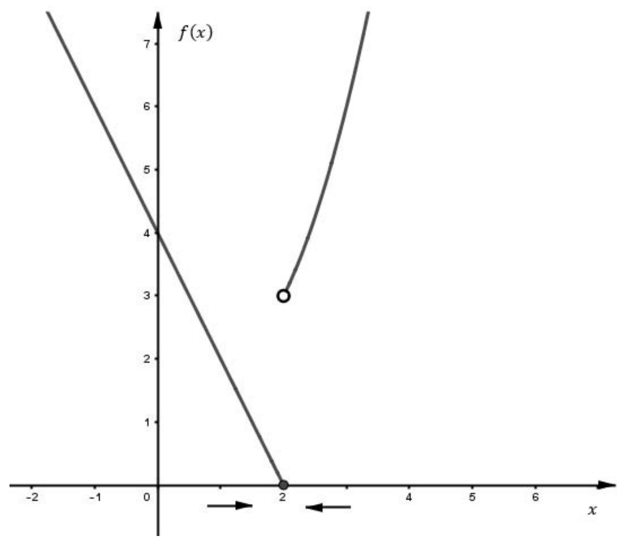
Si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Es importante notar que no todas las funciones satisfacen que los límites laterales tienden al mismo valor. Por ejemplo, consideremos la siguiente función $f(x)$ tal como se muestra en la siguiente figura:



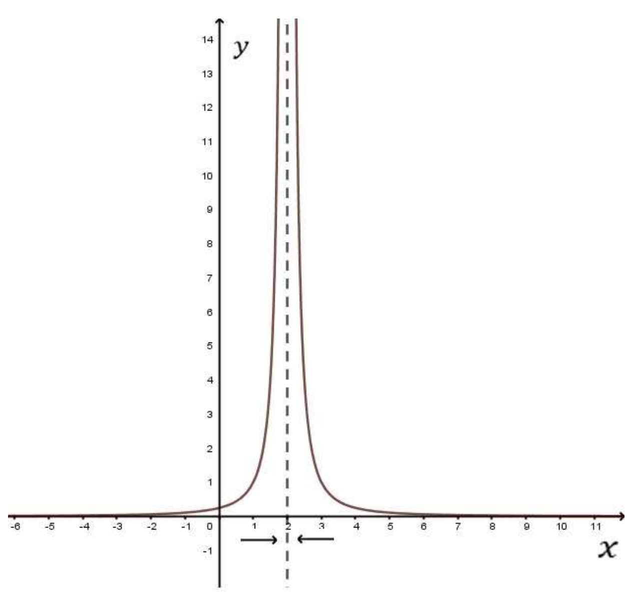
De ella podemos observar que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Por lo que el límite cuando x tiende a 2 no existe. En otras palabras:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$$

En muchas ocasiones también resulta que el valor al que tiende el límite al aproximarnos a un valor x_0 no es un valor finito, por lo que el límite tampoco existe en tal situación, como se muestra en la siguiente figura:



En esta grafica podemos observar que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad y \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Por lo que el límite de la función cuando nos acercamos al número dos no existe. En otras palabras:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \nexists$$

En particular cuando describimos algún fenómeno a través de funciones y en algunos casos es necesario saber ciertos valores a los que la función se aproxima por ello la noción de límite de una función es importante. Para empezar en su estudio consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Supongamos que arrojamos un balón hacia un aro de basquetbol y la altura en cualquier instante de su recorrido es dada por la función:

$$f(t) = -4.9t^2 + 8t + 2$$

Donde $f(t)$ es la altura en metros y t en segundos.

Y deseamos conocer la altura que tendrá transcurrido el primer segundo, lo que podemos hacer es tomar el límite cuando el tiempo tiende a un segundo de la siguiente manera

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1}(-4.9t^2 + 8t + 2)$$

$$f(1) = -4.9(1)^2 + 8(1) + 2 = 5.1m$$

De manera que el valor de la altura cuando el tiempo se aproxima un segundo será de 5.1m

Ejemplo 2

Consideremos que la velocidad de una partícula es dada por la siguiente función:

$$v(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$$

Y deseamos conocer su velocidad en el instante $t = 4s$ y $t = 2s$, así la velocidad en el instante $t = 4s$ será:

$$v(4) = \frac{(4)^2 - 4}{4 - 2} = 6m/s$$

Mientras que en $t = 2s$ será:

$$v(2) = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Como podemos observar de esta manera no es posible determinar el valor de la velocidad de la partícula.

Sin embargo, utilizando el concepto de límite podemos acercarnos a este valor ya que podemos acercarnos al instante $t = 2s$ tanto como lo deseemos, para ello construyamos la siguiente tabla:

Tiempo	velocidad
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999
1.99999	3.99999

Como podemos ver cuando el tiempo tiende a 2 segundos, la velocidad se aproxima a un valor de 4m/s.

Es importante notar que también podemos acercarnos por el "otro lado" como se muestra en la figura:

Tiempo	velocidad
2.1	4.1
2.01	4.01
2.111	4.001
2.1111	4.0001

Observemos que la velocidad también se aproxima a 4m/s. Esto también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lim_{t\to 2^-}\frac{t^2-4}{t-2}=4 \qquad y \qquad \lim_{t\to 2^+}\frac{t^2-4}{t-2}=4$$

Por este hecho y dado que:

$$\lim_{t\to 2^-}\frac{t^2-4}{t-2}=4 \qquad y \qquad \lim_{t\to 2^+}\frac{t^2-4}{t-2}=4$$

Entonces:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t-2}=4$$

Por lo que el valor de la velocidad al aproximarnos a $t=2$ debería ser de $4m/s$.

1.3.2 Continuidad de una función.

Una función f **es continua en un número** a si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esto significa que el valor del límite tiene que ser el valor de la función evaluada en el punto

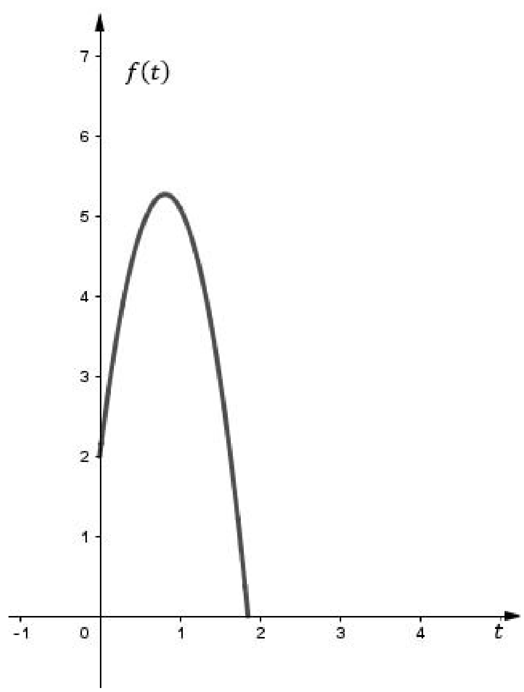
Recordemos el ejemplo de la pelota lanzada al aro, dado que:

$$\lim_{t \to 1} f(t) = \lim_{t \to 1} (-4.9t^2 + 8t + 2)$$

$$f(1) = -4.9(1)^2 + 8(1) + 2 = 5.1m$$

$$\lim_{t \to 1} f(t) = f(1) = 5.1m$$

Por lo que podemos afirmar que la función $f(t) = -4.9t^2 + 8t + 2$ es continua en $t = 1$. Mas aún podemos afirmar que la función es continua en todo su dominio, ya que la función no tiene huecos ni saltos como se puede observar en la siguiente figura:



Notemos que la curva es continua, no presenta discontinuidades para todos los puntos a su imagen es $f(a)$.

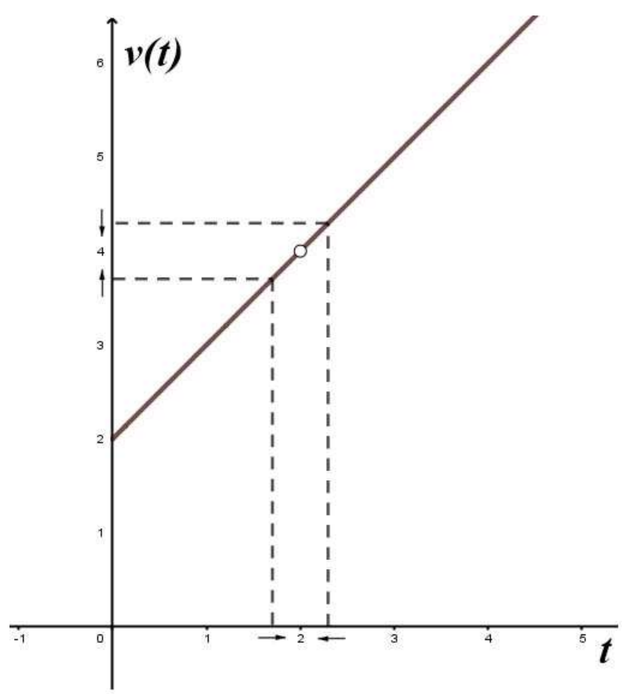
Ahora regresemos al problema de la velocidad dada por la expresión:

$$v(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$$

Dado que el limite

$$v(2) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} = indeterminación$$

Observe que para 2 no es posible obtener $v(2)$ entonces diremos que la función no es continua en $t = 2$ o bien la función tiene una discontinuidad en $t = 2$. Como se pude observar en la figura:



Nótese que la función tiene un "hueco" en las coordenadas (2,4) que indica la ubicación de la discontinuidad. Como podemos observar cuando el tiempo tiende a $2s$ la velocidad debería ser de $4m/s$, este valor se ha obtenido acercándonos a 2 y con la ayuda de unas tablas, surge el cuestionamiento ¿Se puede obtener este valor de manera algebraica? En la siguiente sección daremos respuesta a tal cuestión.

1.4 Cálculo de Límites

Como podemos observar el poder obtener el valor límite al que se aproxima una función es muy importante que ya que nos permite obtener información importante de cierto fenómeno que se esté estudiando a través de funciones.

Para determina los valores de límites de manera muy general se van a presentar en: límites de evaluación directa, indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ e indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

1.4.1 Límites de Evaluación directa:

Entre los casos de límites se tienen primero los que se calculan mediante la evaluación directa como se muestra, esto es al sustituir el valor al que tiende el límite no se presenta ninguna indeterminación, como se muestra en los siguientes ejemplos:

1) $\lim_{x\to -2}(5-2x) = 5-2(-2) = 9$

2) $\lim_{x\to 4}\frac{2}{x+6} = \frac{2}{4+6} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

3) $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-3x} = \sqrt{1-3}(-1) = \sqrt{4} = 2$

1.4.2 Los límites que presentan una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Este tipo de límites se pueden calcular ya sea factorizando o bien racionalizando, este tipo de límites se resolverán en esta sección.

Regresemos al ejemplo de la velocidad dada por:

$$v(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$$

como recordamos, al evaluar de manera directa se presenta este tipo de indeterminación:

$$v(2) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Sin embargo, para calcularlo, es posible factorizar el numerador ya que es una **diferencia de cuadrados** $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$. Así el límite se puede escribir así:

$$v(2) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t + 2)\cancelto{1}{(t - 2)}}{\cancel{(t - 2)}} = \lim_{t \to 2}(t + 2) = 2 + 2 = 4\,m/s$$

El cual, es el valor que esperábamos.

A continuación, presentamos una serie de ejercicios resueltos por factorización y racionalización para el cálculo de límites:

a) Factorización.

Es importante en primer lugar evaluar de manera directa para observar si se tiene la indeterminación cero sobre cero, de ser así se podrá factorizar para ver la posibilidad de poder estimarlo.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2+2x-15}=\frac{3^2-3(3)}{3^2+2(3)-15}=\frac{9-9}{9+6-15}=\frac{9-9}{15-15}=\frac{0}{0}\ Ind.$$

Solución

Una vez identificada la indeterminación, procedemos a factorizar en el numerador tenemos como factor común a "x" y el denominador se puede factorizar en un producto de binomios, como se muestra:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+5}=\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$$

Ejemplo 2

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{4x^2-36}=\frac{2(3)-6}{4(3)^2-36}=\frac{6-6}{4(9)-36}=\frac{0}{36-36}=\frac{0}{0}\ Ind.$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, si factorizamos el denominador se puede calcular quedando:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(2x-6)(2x+6)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x+6}=\frac{1}{2x+6}=\frac{1}{2(3)+6}=\frac{1}{12}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{1^2+3\,(1)-4}{1^2-3(1)+2}=\frac{1+3-4}{1-3+2}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}\ Ind.$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, si factorizamos el numerador y denominador como un producto de binomios se puede calcular quedando:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-2} = \frac{1+4}{1-2} = \frac{5}{-1} = -5$$

Ejemplo 4

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\ Ind.$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, si factorizamos utilizando **la diferencia de cubos** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ obtenemos que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1=3$$

Ejemplo 5

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{2-x} = \frac{8-2^3}{2-2} = \frac{8-8}{2-2} = \frac{0}{0}\ Ind.$$

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, si factorizamos utilizando **la diferencia de cubos** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ obtenemos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^3-x^3}{2-x} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2^2+2x+x^2)}{2-x} = \lim_{x\to 2}4+2(2)+2^2=12$$

Ejemplo 6

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\frac{16-16}{2-2}=\frac{0}{0}$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, para poder evaluar este tipo de límites se recomienda realizar la división, es este caso utilicemos la división sintética.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

Así el límite se factoriza como:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2+4x+8)=32$$

Ejemplo 7

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{a\to x}\frac{a^5-x^5}{a-x}=\frac{a^5-a^5}{a-a}=\frac{0}{0}$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, para poder evaluar este tipo de límites se recomienda realizar la división para factorizar.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^5 \\ x & & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \hline & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{a\to x}\frac{a^5-x^5}{a-x}=\lim_{a\to x}\frac{(a-x)(a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4)}{a-x}$$

$$\lim_{a\to x}(a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4)=x^4+x^4+x^4+x^4+x^4=5x^4$$

Así

$$\lim_{a\to x}\frac{a^5-x^5}{a-x}=5x^4$$

Ejemplo 8

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{a\to x}\frac{a^n-x^n}{a-x}=\frac{a^n-a^n}{a-a}=\frac{0}{0}$$

Solución

Para resolver este límite observemos que en el ejemplo que se realizó anteriormente la expresión a^5-x^5 se factorizó como:

$$a^5-x^5=(a-x)(a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4)$$

Como podemos observar existe una cierta regularidad en las potencias de la factorización, mientras que las potencias de a van decreciendo las potencias de x van aumentando con ello podemos factorizar como:

$$a^n-x^n=(a-x)(a^n+a^{n-1}x+a^{n-2}x^2+a^{n-3}x^3+\cdots+ax^{n-1}+x^n)$$

Así el límite será:

$$\lim_{a \to x} \frac{a^n - x^n}{a - x} = \lim_{a \to x} \frac{(a - x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + a^{n-4}x^3 + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1})}{a - x}$$

$$\lim_{a \to x}(a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + a^{n-4}x^3 + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1})$$

$= \ x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} = nx^{n-1}$ ya que son n términos entonces:

$$\lim_{a \to x} \frac{a^n - x^n}{a - x} = \ nx^{n-1}$$

Ejemplo 9

Calcula el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{3}}{x - 3} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{3 - 3} = \frac{0}{0} \ Ind.$$

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, para poder evaluar este tipo de límites se recomienda realizar la suma algebraica como sigue:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{12 - 4x}{3x}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{12 - 4x}{3x(x - 3)} = \ \lim_{x \to 3} \frac{-4(x - 3)}{3x(x - 3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{-4}{3x} = \frac{-4}{3(3)} = \frac{-4}{9}$$

b) Racionalización

En este tipo de límites se sugiere multiplicar por el conjugado tanto el numerador como el denominador. Si se tiene una expresión de la forma $(a + b)$ su conjugado será $(a - b)$ y viceversa.

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{1^2-1}{1-\sqrt{1}}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\;\; Ind.$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, en este caso multiplicamos tanto el numerador y denominador por el conjugado de $(1-\sqrt{x})$ que será $(1+\sqrt{x})$ como se muestra:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}\;\frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x}\,)(1+\sqrt{x})}=\frac{(x^2-x)(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{-x(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}=$$

$$\lim_{x\to 1}-x(1+\sqrt{x})=\lim_{x\to 1}-(1+\sqrt{1})$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2(4)+1}-3}{\sqrt{4-2}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9}-3}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{3-3}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}\; Ind.$$

Solución

Al evaluar de manera directa observamos que se presenta una indeterminación, en este caso multiplicamos tanto el numerador y denominador por los conjugados del numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-3^2\right]}{\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]}\cdot\frac{\left[\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right]}{\left[\sqrt{2x+1}+3\right]}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)}{x-2-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2x+1}+3}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2(4)+1}+3}=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9}+3}=\frac{2\left(2\sqrt{2}\right)}{3+3}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

1.4.3 Los límites que presentan una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

En este tipo de límites en la mayoría de los casos, para calcularlos basta con dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador como se muestran en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 12

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-2}{8x^3+2x+5}=\frac{\infty}{\infty}Ind.$$

Solución

Dividamos sobre la potencia más grande el denominador así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+x-2}{x^3}}{\frac{8x^3+2x+5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{8+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$

Cuando x tiende al infinito los cocientes tienden a cero así:

$$\frac{3+0-0}{8+0+0}=\frac{3}{8}$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x-1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}\ Ind.$$

Solución

Dividamos sobre la potencia más grande el denominador así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2-x-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Cuando x tiende al infinito los cocientes tienden a cero así:

$$=\frac{4-0-0}{1+0}=1$$

De manera general hemos estudiado algunos procesos infinitos, así como el significado de límite y hemos visto que el valor límite de una función puede ser calculado de distintas maneras. A continuación, presentamos algunos ejercicios que serán de ayuda para el estudio de los límites.

1.4.4 Ejercicios

Encontrar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to4}(3x+2)$

b) $\lim\limits_{x\to-2}(5-2x)$

c) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2}{x+6}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x+7}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3+2x^2+x}{8x^2-7x}$

f) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-6}{4x^2-3}$

g) $\lim_{t \to -\frac{2}{3}} \frac{3t+2}{9t^2-4}$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

j) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

k) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3+3x^2-x-18}{x-2}$

l) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$

m) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

n) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{x}$

o) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

p) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

q) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

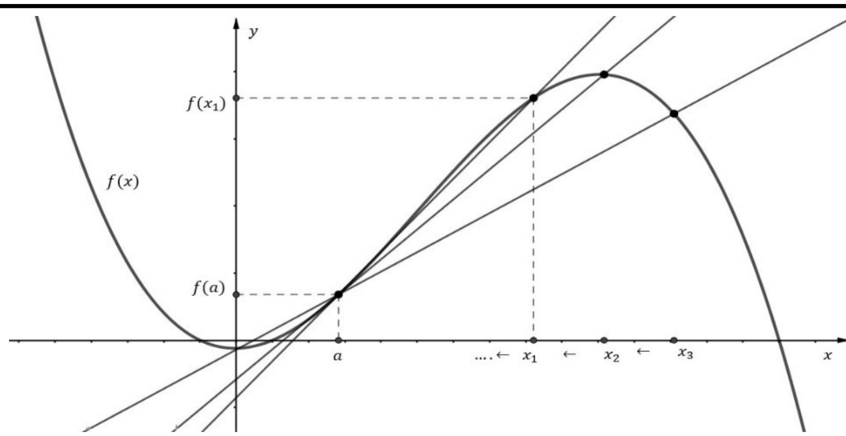
r) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4-4x^3+x^2-8x+15}{3x^4-2x^2+5x+1}$

s) $\lim_{x \to \infty} \frac{10\ {}^{8}-2x^7+7x^3+7}{2x^8+3x^6-2x+1}$

t) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4-4x^3+4x^2-x+2}{2x^5+2x^3-3x+7}$

Unidad 2

El concepto de Derivada: variación y razón de cambio.

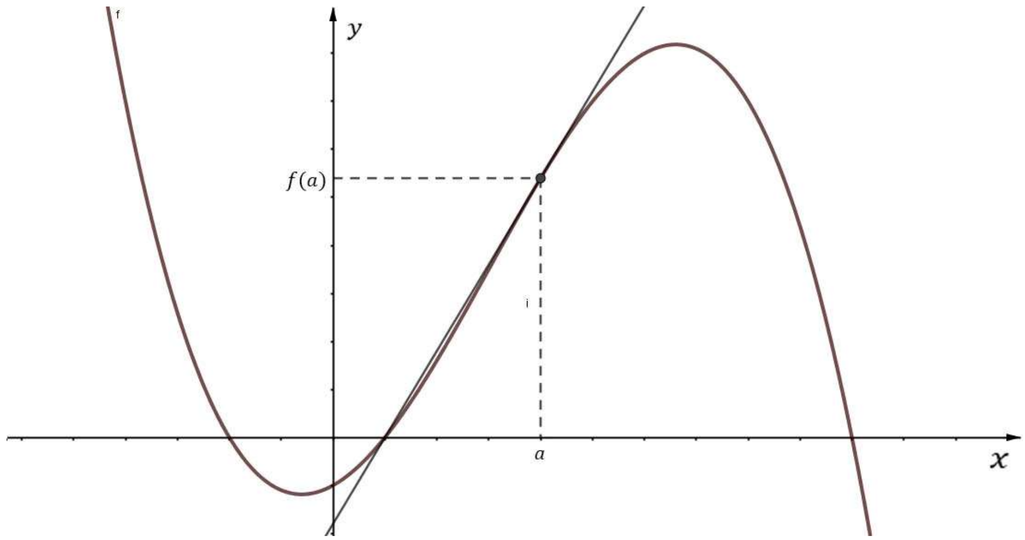


Objetivos específicos, el alumno:

- Reconocerá en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas
- Reconocerá y deducirá a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.
- Utilizará a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.
- Calculará la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.
- Interpretará en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.

2.1 El problema de la tangente.

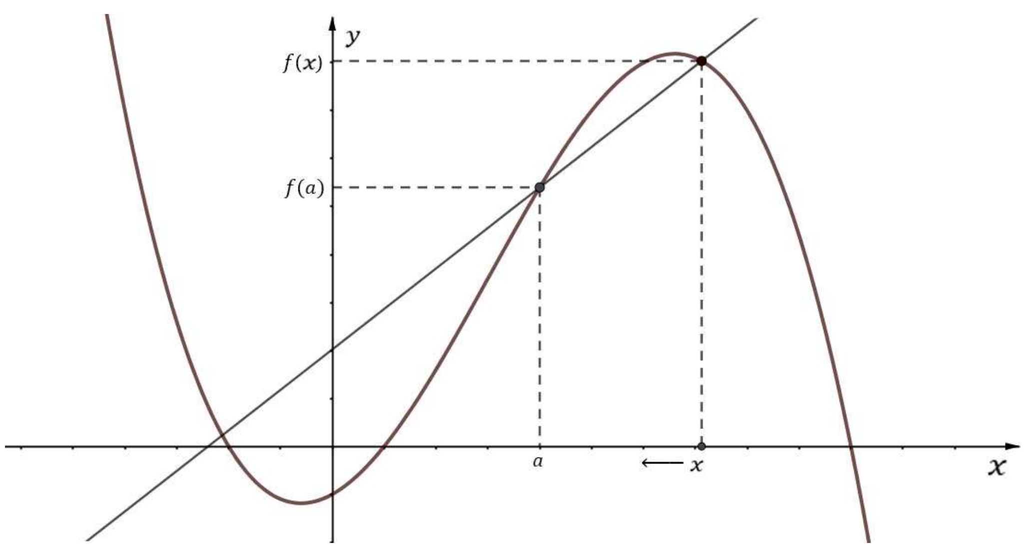
Supongamos que tenernos una función $f(x)$ la cual tiene asociada la siguiente gráfica:



Y deseamos obtener la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $(a, f(a))$, para ello es necesario conocer la pendiente que tendrá la recta en dicho punto. La pendiente de cualquier recta en el plano cartesiano se estima:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para poder estimar el valor de dicha pendiente una opción es trazar una recta secante.



Es claro que la pendiente de la recta secante estará dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Observemos que si el valor de x lo aproximamos al valor de "a" entonces la pendiente de la secante se aproxima al valor que deberá tener la pendiente de la recta tangente.

En otras palabras:

$$m_{tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como podemos observar para poder encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente es necesario, determinar el límite anterior.

Veamos el siguiente ejemplo:

Dada $f(x) = x^2$ deseamos conocer la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto $x = 2$.

Estimamos el valor de la pendiente de la siguiente manera:

$$m_{tan} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Para resolver el límite factorizamos.

$$m_{tan} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$m_{tan} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Recordemos que la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En nuestro caso la recta tiene pendiente y queremos que pase por (2,4)

$y - 4 = 4(x - 2)$

$y - 4 = 4x - 8$

Así la ecuación de la recta tangente es:

$$4x - y - 4 = 0$$

Como podemos observar y de manera general:

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente_

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el límite existe

2.2 El problema de la velocidad.

En física la velocidad se define por la razón distancia sobre tiempo:

$$v = \frac{d}{t}$$

Si deseamos determinar la velocidad media, que no es otra cosa más que el desplazamiento (distancia recorrida) en un lapso de tiempo determinado, entonces esta se define de la siguiente manera:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Donde $x_2 \ y \ x_1$ son las posiciones del objeto que se desplaza en los instantes $t_2 \ y \ t_1$.

Pare entender mejor, supongamos que una partícula se encuentra en un instante $t_1 = 5s$, a 10 metros y en otro instante se encuentra a $t_2 = 10s$ a 25 metros, su velocidad media será:

$$v_m = \frac{25m - 10m}{10s - 5s} = 3\, {}^{m}/_{s}$$

Ahora bien, supongamos que la partícula es un balón lanzado hacia un aro de Basquetbol y su trayectoria en el tiempo es descrita por la función:

$$f(t) = -4.9t^2 + 6t + 2$$

Donde $f(t)$ es la altura en metros y t es el tiempo de vuelo en segundos.

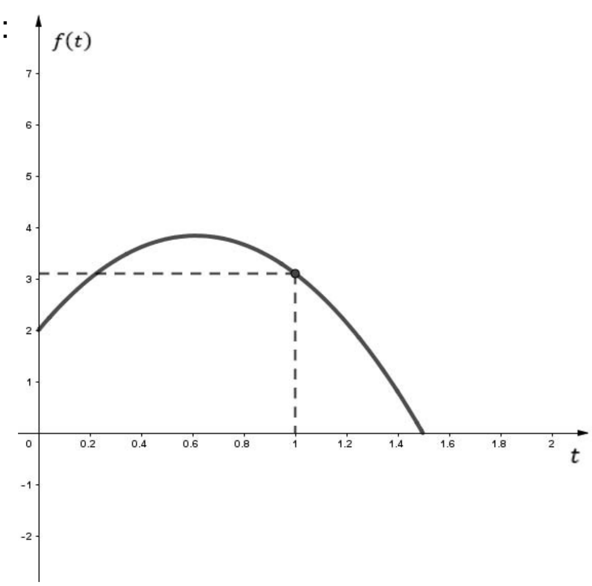
Esta función nos permite establecer la distancia a la que se encuentra el balón, en cualquier instante, por ejemplo, al tiempo $t = 0$ se obtiene:

$$f(0) = -4.9(0)^2 + 6(0) + 2 = 2m$$

Esto significa que el balón antes de ser arrojado se encuentra a una altura de dos metros. Esto es en el instante $t_1 = 0s$ esta a 2 metros del suelo. Veamos su posición transcurridos un segundo.

$$f(1) = -4.9(1)^2 + 6(1) + 2 = 3.1m$$

Como se muestra en la figura:



Así la velocidad media de la partícula estará dada por:

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{3.1 - 2}{1 - 0} = 1.1 m/s$$

2.2.1 Velocidad instantánea.

Es interesante establecer a qué velocidad es arrojada la pelota, esto es deseamos conocer su velocidad en el instante $t = 0$

Notemos que, en ese instante, la pelota no ha recorrido ninguna distancia ni ha transcurrido tiempo, por lo cual no es posible determinarla de esta manera:

$$v = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Una opción es determinar la velocidad media con cualquier instante t, así la velocidad media será:

$$v(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t) - 2}{t}$$

Es claro que de esta manera nos podemos acercar tanto a la cero como lo deseemos para poder estimar la velocidad con la cual la pelota es arrojada

t	$f(t) = -4.9t^2 + 6t + 2$	$v(t) = \frac{f(t) - 2}{t}$
0.1	$f(0.1) = 2.551$	$v(0.1) = 5.51 m/s$
0.01	$f(0.01) = 2.05951$	$v(0.01) = 5.951 m/s$
0.001	$f(0.001) = 2.0059951$	$v(0.001) = 5.9951 m/s$
0.0001	$f(0.0001) = 2.000599951$	$v(0.0001) = 5.99951 m/s$

Como podemos observar acercarnos tanto como podamos, no permite observar la tendencia al valor de la velocidad en el instante $t = 0$, para conocer la velocidad instantánea hacemos tender t a cero, lo que significa que ésta estará dada por el siguiente límite:

$$v(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-4.9t^2 + 6t + 2 - 2}{t}$$

$$v(0) = \lim_{t \to 0} \frac{t(-4.9t + 6)}{t}$$

$$v(0) = \lim_{t \to 0} -4.9t + 6 = 6m/s$$

Como podemos observar la estimación del límite nos ha permitido calcular la velocidad instantánea.

De manera general si $f(t)$ describe la posición de un objeto o partícula en el tiempo, la velocidad en cualquier instante $t = a$ se puede estimar mediante el límite:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Veamos otro ejemplo consideremos que una partícula describe su posición en el tiempo mediante la siguiente función:

$$f(t) = \sqrt{t}$$

Donde f(t) está en metros. Deseamos conocer la velocidad en el instante $t = a$, segundos, entonces la velocidad instantánea estará dada por:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{a}}{t - a}$$

Para resolver este límite hay que racionalizar (ver sección 1.4.3.2)

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{a}}{t - a} \cdot \frac{\sqrt{t} + \sqrt{a}}{\sqrt{t} + \sqrt{a}}$$

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{(t-a)}{(t-a)\left(\sqrt{t}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{t \to a} \frac{1}{\left(\sqrt{t}+\sqrt{a}\right)}$$

$$v(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} m/s$$

Como podemos observar:

Dada la posición de la partícula, mediante el límite:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Podemos conocer la velocidad instantánea en cualquier tiempo en que se deseé conocer.

2.3 Razón de Cambio

Se llama razón de cambio promedio al cociente de dos variables en un intervalo $[x_1, x_2]$

$$razón\ de\ cambio\ promedio = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Para entender este concepto, suponga que C(x) es una función que relaciona a el costo en pesos por la producción de x unidades de calzado en miles la cual está dada por:

$$C(x) = 3000x^2 - 7700x + 5000$$

El costo por producir $x_1 = 2$ mil unidades de calzado será:

$$C(x_1) = 3000(2)^2 - 7700(2) + 5000 = 1600$$

Esto es el costo es de 1,600 pesos, mientras que por la producción de $x_1 = 3$ mil unidades será:

$$C(x_2) = 3000(3)^2 - 7700(3) + 5000 = 8900$$

Así el cambio en el costo será $\Delta y = C(x_2) - C(x_1)$ mientras que el cambio en la cantidad de unidades de calzado será. $\Delta x = x_2 - x_1$, así la razón de cambio promedio será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8900 - 1600}{3 - 2} = 7300 \frac{\$}{u}$$

Nos dice cuanto está variando el costo total, cuando la empresa varía su nivel de producción. En este caso la razón de cambio promedio indica, el costo promedio por mil unidades de producción o bien un costo promedio de 7.3 pesos por unidad.

2.3.1 Razón de Cambio instantánea

Como hemos visto en el problema de la velocidad instantánea y de la tangente es posible obtener la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños, para ello podemos hacer que x_2 tienda a x_1 así podemos definir a la razón de cambio instantánea como:

$$razón\ de\ cambio\ instantanea = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Consideremos el ejemplo anterior, estamos interesado en conocer la razón del cambio instantánea por la producción de 3 mil unidades de calzado, en ese caso, estará dada por:

$$\lim_{x \to 3} \frac{C(x) - C(3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3000x^2 - 7700x + 5000 - 8900}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3000x^2 - 7700x - 3900}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(3000x + 1300)}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} (3000x + 1300) = 10300 \frac{\$}{u}$$

La razón de cambio instantánea nos indica el costo total para la producción por la producción, también llamado costo marginal, la cual es de 10300 por mil unidades de producción o bien 10.3 pesos por unidad por la producción de 3 mil unidades.

De manera general si una cantidad depende de otra se puede establecer:

La razón de cambio instantánea de una cantidad f(x) con respecto a x en el intervalo $[x_1, x]$ como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Cuando el límite existe.

2.5 El concepto de derivada

La derivada se define como la razón de cambio instantánea de una función $f(x)$ en un punto a, en otras palabras:

La derivada en un punto a es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el límite existe.

Es importante observar que la derivada como hemos visto tiene distintos significados que dependen del contexto, por ejemplo, si f(x) es una curva en el plano cartesiano, la razón de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Ahora bien, si $f(t)$ la función posición de una partícula que se desplaza a lo largo del tiempo, la derivada será la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$. Si f(x) es una función de costo de producción, la derivada será el costo marginal.

De manera general, estas son razones de cambio, es importante considerar que existen muchas razones de cambio que pueden ser de interés en áreas de estudio como la Ingeniería, química, biología etc., las cuales se pueden interpretar como pendientes de tangentes, de ahí la importancia del problema de la tangente. En los siguientes ejemplos haremos algunos cálculos de derivadas.

2.5.1 Ejemplos de Derivadas.

Ejemplo 1

Determina la derivada de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ en el punto $x = 3$

Solución

La derivada se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Así

$$f'(3) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

Con $f(3) = 3(3)^2 - 6(3) + 2 = 11$ tenemos:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 6x + 2 - 11}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3(x^2 - 2x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{3(x - 3)(x + 1)}{x - 3}$$

Así

$f'(3) = \lim_{x \to 3} 3(x+1) = 12$

Ejemplo 2

Determina la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el punto x = 0

Solución

La derivada se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Así

$$f'(0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Con $f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$ tenemos:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - 2}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)} = \; = \lim_{x \to 3} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}\right)}$$

Así la derivada de la función en cero será:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejemplo 3

Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - x$ en el punto x=2

Solución

La pendiente de la recta tangente está dada por:

$$m = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 3)}{x - 2}$$

$$m = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 3) = 11$$

La ecuación de la recta en el plano dado un punto y su pendiente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que la recta pasa por el punto $x_1 = 2$ y $y_1 = 2^3 - 2 = 6$ su ecuación es:

$$y - 6 = 11(x - 2)$$

$$11x - y - 16 = 0$$

Ejemplo 4

Un objeto se mueve en una trayectoria de tal manera que su posición en metros como función del tiempo en segundos está dada por la expresión:

$$r(t) = t^3 - 3t^2 + 2$$

Determina, la velocidad del objeto a los 3 segundos.

Solución

La velocidad en cualquier instante de tiempo t=a esta dada por:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Así:

$$v(3) = \lim_{t \to a} \frac{r(t) - r(3)}{t - 3} = \lim_{t \to a} \frac{t^3 - 3t^2 + 2 - 2}{t - 3}$$

$$v(3) = \lim_{t \to a} \frac{t^3 - 3t^2}{t - 3} = \lim_{t \to a} \frac{t^2(t - 3)}{t - 3}$$

$$v(3) = 3^2 = 9\, m/s$$

Ejemplo 5

Un fabricante tiene una producción x y el costo total anual de la producción se describe por medio de la función:

$$Q(x) = 100000 + 1500x + 0.2\, x^2$$

Determina ¿cuál es el costo de producción por unidad para la producción de 100 unidades?

Solución

El costo por la producción de 100 unidades es:

$$Q(100) = 100000 + 1500(100) + 0.2\,(100)^2$$

$$Q(100) = 252{,}000$$

El costo de producción promedio está dado por:

$$\bar{Q}(x) = \frac{Q(x) - Q(100)}{x - 100}$$

Estamos interesados en conocer el costo por unidad de producción cuando se producen 100 unidades en otras palabras debemos demos conocer el valor límite cuando x tiende a 100, en otras palabras, es necesario conocer la derivada, la cual será:

$$Q'(100) = \lim_{x \to 100} \frac{Q(x) - Q(100)}{x - 100}$$

$$Q'(100) = \lim_{x \to 100} \frac{100000 + 1500x + 0.2\, x^2 - 252000}{x - 100}$$

$$Q'(100) = \lim_{x \to 100} \frac{-152000 + 1500x + 0.2\, x^2}{x - 100}$$

$$Q'(100) = \lim_{x \to 100} \frac{(x - 100)(0.2x + 1520)}{x - 100}$$

$$Q'(100) = \lim_{x \to 100} (0.2x + 1520) = 1540$$

Esto significa que el costo es de 1,540 por unidad, cuando se tiene una producción de 100 unidades.

2.6. Ejercicios

2.6.1 Ejercicios

Encuentra la derivada de las funciones en el punto indicado

a) $f(x) = x^2 - x \quad en \quad x = 2$

b) $f(x) = x^3 - 1 \quad en \quad x = 1$

c) $f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad en \quad x = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \quad en \;\; x = 2$

e) $f(x) = \frac{1}{x-2} \quad en \quad x = 3$

f) $f(x) = \sqrt{x} \quad en \;\; x = 4$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5} \quad en \; x = 3$

2.6.2 Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = x^2 \quad en \quad x = 2$

b) $f(x) = x^3 - 1 \quad en \quad x = 2$

c) $f(x) = x^3 + 2x \quad en \quad x = a$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad en \ \ x \ = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x+2} \quad en \quad x = 3$

f) $f(x) = \sqrt{x+8} \quad en \ \ x = 1$

g) $f(x) = \sqrt{x-2} \quad en \, x = 6$

2.6.3 Ejercicios

a) Si una pelota se lanza al aire hacia arriba, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por y $f(t) = 32t - 16t^2$. Encuentre la velocidad al primer segundo y a los dos segundos.

b) El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación del movimiento $r(t) = \frac{1}{t^2}$,donde t se mide en segundos. Determina la velocidad de la partícula en los instantes, $t = 1$ y $t = a$.

c) El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es:

$$C(x) = 4000 - 20x + 0.05x^2.$$

i) Encuentra la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción de $x = 300$ a $x = 301$

ii) Encuentra la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, cuando $x = 300$. ¿Qué indica?

d) Los registros de temperatura en grados centígrados tomados entre las 0 y las 24 horas, en una zona rural están dados por la función:

$$f(x) = -0.2x^2 + 4.8x - 12.6$$

i) Encuentra la razón de cambio promedio de t $= 10$ a $t = 12$

ii) Encuentra la razón de cambio promedio de t $= 10$ a $t = 11$

iii) Encuentra la razón de cambio instantánea cuando $t = 10hrs$. ¿Qué significa?

Unidad 3

Derivada de funciones algebraicas

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Objetivos específicos:

Identificará geométricamente la relación de la representación de la derivada vista en el capítulo anterior con el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Obtendrá derivadas utilizando el límite anterior.
- Explicará la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identificará dicha relación en el caso de la función constante.
- Identificará el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x)=cx^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.
- Obtendrá la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.
- Identificará a la derivada de una función como una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.
- Utilizará la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.

3. La derivada

En la unidad anterior, definimos la derivada de una función en el punto $x = a$ como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siempre y cuando el límite anterior exista. Éste también puede ser expresada para obtener la derivada en cualquier punto x de la siguiente manera:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Recordemos que los significados de este límite se relacionan con la pendiente de la recta tangente, la velocidad instantánea y en general una razón de cambio. En esta sección se establecen formas de derivación para distintos tipos de funciones como se muestra a continuación.

3.2 La derivada de funciones polinomiales

En general muchas de las funciones que modelan nuestro entorno a través de ciertas reglas, por lo cual es de interés conocer la razón de cambio de las variables involucradas, en otras palabras, es necesario obtener su derivada.

En esta sección en particular desarrollaremos métodos para derivar funciones de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

A este tipo de funciones se les conoce como funciones polinomiales.

3.2.1 La derivada de una constante

A la función de polinomial de grado cero también se le conoce como función constante, siendo esta:

$$f(x) = a_0$$

En este caso su derivada será:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{a_0 - a_0}{a - x} = 0$$

Como podemos observar la derivada de una constante es **Cero.** Para entender mejor consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Consideremos que la relación entre la calificación de un examen que obtiene un alumno del CCH y el tiempo de estudio esta dado por la función:

$$C(t) = 3$$

Donde t es el tiempo de estudio, la gráfica de dicha solución será:

Como podemos observar, sin importar el tiempo de estudio la calificación del examen será siempre 3.

Si queremos saber cuál es la razón de cambio de la calificación con respecto al tiempo al estudiar es claro que no hay ninguna variación. Veamos, consideremos la variación promedio entre la cero horas de estudio y 4 horas de estudio, así el cambio de calificación respecto del tiempo de estudio será:

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{3 - 3}{0 - 4} = 0$$

En general:

Si $f(x) = a_0$ con $a_0 \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 0$

3.2.2 Derivada de una función Lineal

A la función de grado uno:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

También se le conoce como función lineal, la gráfica de dicha función es una línea recta de ordenada a_0 y pendiente a_1

Su derivada en cualquier punto x será:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{a_0 + a_1 \cdot a - (a_0 + a_1 x)}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{a_0 + a_1 \cdot a - a_0 - a_1 x}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{a_1 \cdot a - a_1 x}{a - x} = \lim_{a \to x} \frac{a_{1(}a - x)}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} a_1 = a_1$$

Como podemos observar hemos obtenido un resultado muy interesante y un tanto obvio, la derivada de la función lineal la pendiente de dicha recta, ya que recordemos que la derivada de una función en algún punto de interés es la pendiente de la recta tangente.

3.2.3 Derivada de cx^n

Para derivar polinomios de orden superior es de interés conocer la derivada de funciones que tienen la forma $f(x) = cx^n$ para cualquier punto x. Para entender mejor consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Obtén la derivada de:

$$f(x) = 3x^5$$

Solución

Para ello consideremos que la derivada es:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Así la derivada será:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{3a^5 - 3x^5}{a - x} = \lim_{a \to x} \frac{3(a-x)(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)}{a - x}$$

$$f'(x) = 3\lim_{a \to x}(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)$$

$$f'(x) = 3(x^4 + x^3 \cdot x + x^2 \cdot x^2 + x \cdot x^3 + x^4)$$

$$f'(x) = 3(x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4)$$

$$f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$$

De manera general consideremos que estamos interesados en conocer la derivada de funciones de la forma:

$$f(x) = cx^n \qquad f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Así:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{ca^n - cx^n}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{c(a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1})}{a - x}$$

$f'(x) = \mathrm{c}\lim_{a \to x}(a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1})$

$f'(x) = c(x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1})$

$f'(x) = c(x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1})$

$\boldsymbol{f'(x) = cn\ \ ^{n-1}}$

Este es uno de los resultados más importantes ya que nos permite conocer la derivada de expresiones de la forma $f(x) = cx^n$.

Si $f(x) = cx^n$

con n y $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ entonces

$f'(x) = cnx^{n-1}$

A continuación, presentamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2

Consideremos que deseamos conocer la derivada de $f(x) = x^3$ en el punto $x = 2$

Según la definición anterior la derivada en cualquier punto x será:

$f'(x) = 3x^{3-1}$

$f'(x) = 3x^2$

En particular si $x = 2$ la derivada será:

$$f'(2) = 3(2)^2 = 12$$

Este resultado puede verificarse, si se hace la derivada de la siguiente manera:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} (x^2 + 2x + 4)$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} (2^2 + 2(2) + 4) = 12$$

El uso de esta regla se puede extender a los números racionales y en general a cualquier número real como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Consideremos que deseamos conocer la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 4$

Solución

La función se pude escribir como:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Así, la derivada en cualquier punto x será:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En particular si $x = 4$ la derivada será:

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Nuevamente y por última ocasión verifiquemos la solución:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$f'(4) = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Como podemos observar, la regla de derivación que hemos encontrado nos facilita el trabajo de derivar.

3.2.4 La derivada de una suma.

Toda función algebraica se pude expresar como la suma de varias funciones de la siguiente manera:

$$f(x) = p(x) + q(x) + \cdots + z(x)$$

Consideremos como ejemplo que si $p(x) = x^3$, $q(x) = 2x$, $r(x) = \sqrt{x}$

Entonces:

$$f(x) = x^3 + 2x + \sqrt{x}$$

Si queremos determinar la derivada de $f(x)$ tenemos:

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{p(a) + q(a) + \cdots z(a) - [p(x) + q(x) + \cdots + z(x)]}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{p(a) + q(a) + \cdots z(a) - p(x) - q(x) - \cdots - z(x)]}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \frac{[p(a) - p(x)] + [q(a) - q(x)] + \cdots + [z(a) - z(x)]}{a - x}$$

$$f'(x) = \lim_{a \to x} \left[\frac{p(a) - p(x)}{a - x} + \frac{q(a) - q(x)}{a - x} + \cdots + \frac{z(a) - z(x)}{a - x}\right]$$

Así:

$$f'(x) = p'(x) + q'(x) + \cdots + z'(x)$$

En otras palabras: **la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas**.

Si $f(x) = p(x) + q(x) + r(x) + \cdots + z(x)$

entonces su derivada será:

$$f'(x) = p'(x) + q'(x) + r'(x) + \ldots + z'(x)$$

Un resultado inmediato es que es posible establecer algunas derivadas, como se muestra a continuación:

Ejemplo 1

En el Ejemplo 1, de la sección 2.5.1 se calculó la derivada de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ en el punto $x = 3$, utilizando el límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora utilicemos los resultados que hemos obtenido para derivar:

$f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Así la derivada será en cualquier punto x será:

$f'(x) =3(2x) - 6(1) + 0$

$f'(x) =6x - 6$

En particular en $x = 3$ la derivada será

$$f'(3) = 6(3) - 6 = 12$$

Es importante que el lector verifique la solución que como se menciona ya ha sido determinada.

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 + 2x + \sqrt{x}$ en el punto $x = 1$

Solución

La función se puede expresar como:

$$f(x) = x^3 + 2x + x^{\frac{1}{2}}$$

Así, su derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Dado que la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 1$ es la derivada evaluada en el punto, tenemos que su valor es

$$m = f'(1) = 3(1)^2 + 2 + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 3 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

con $f(1) = (1)^3 + 2(1) + \sqrt{1} = 4$ las coordenadas del punto por donde pasa son $(1,4)$. Así la ecuación de la recta tangente será:

$$y - 4 = \frac{13}{2}(x - 1)$$

O bien: $13x - 2y - 5 = 0$

3.2.5 Ejercicios

3.2.5.1 Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

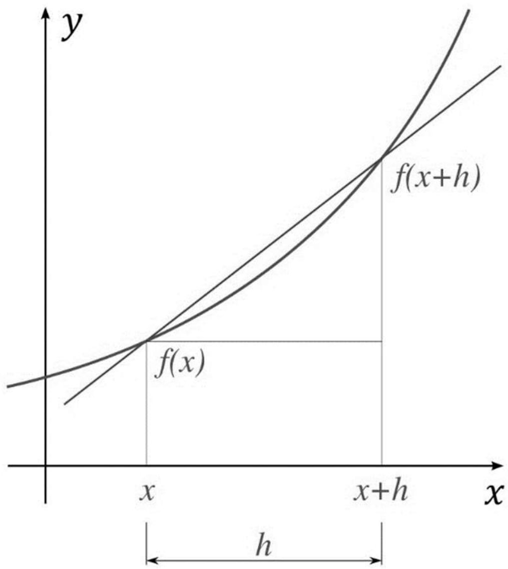
a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
c) $f(x) = 4x^8 + 3x^5 + 2x^3 + 4$
d) $f(x) = x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3$
e) $f(x) = 4x^5 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 3\sqrt[5]{x^2}$

3.2.5.2 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función en el punto indicado

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$ $\quad en\ x = 8$
b) $f(x) = x^4 - 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad en\ x = 1$
c) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x^3 + 4$ $\quad en\ x = 0$
d) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x$ $\quad en\ x = 1$
e) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 - 10$ $\quad en\ x = 2$

3.3 La derivada mediante el cociente de incrementos

Uno de los significados de la derivada, es la ecuación de la recta tangente a una función en algún punto, para obtenerla consideremos a la figura:



Como podemos observar se puede construir una secante de tal manera que consideremos un pequeño incremento h para poder conocer su pendiente, la cual será:

$$m_{sec} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Para poder encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto x, es claro que el incremento h debe tender a cero así la derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3.3.1 Relación entre la derivada por cociente de incrementos y el límite de Fermat.

En las secciones previas, definimos la derivada de una función como:

$$f'(x) = \lim_{a\to x}\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

Siempre y cuando el límite anterior exista. Dicho límite también se conoce como el límite de Fermat.

Consideremos que podemos hacer $h = a - x$, de lo anterior se desprende que:

1) $a = x + h$
2) Cuando $a \to x$, $h \to 0$ como se observa en la figura.

De manera que al sustituir la derivada queda como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como podemos observar es el límite que encontramos con anterioridad. Veamos de qué modo es posible obtener la derivada de una función mediante este límite.

3.3.2 Ejemplos de Derivadas.

Ejemplo 1

En la sección anterior se encontró la derivada de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ en el punto x = 3.

En particular si aplicamos la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 6(x+h) + 2 - [3x^2 - 6x + 2]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 6x - 6h + 2 - 3x^2 + 6x - 2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 6h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h - 6)}{h} = = \lim_{h \to 0} (6x + 3h - 6)$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

Como podemos observar hemos obtenido la misma derivada que en el ejemplo citado

En particular si $x = 3$

$$f'(3) = 6(3) - 6 = 12$$

Lo cual coincide con el resultado obtenido con anterioridad es importante observar las marcadas diferencias de las maneras de obtener la derivada de una función.

En general este límite es el más utilizado para estimar el cálculo de derivadas.

Ejemplo 2

Encuentra el valor de la derivada de:

$$f(x) = x^3$$

Solución

Como hemos visto la derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Como podemos observar para estimar límites mediante esta definición es necesario conocer la expansión del binomio $(x+h)^n$, una forma posible más no la única es mediante el triángulo de pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
...

Este se construye siguiendo un patrón como el que se muestra en la figura de arriba. Se comienza desde la cúspide con el número uno y se van sumandos los números del renglón anterior colocando la suma por debajo de cada renglón.

Este triángulo nos proporciona los coeficientes de la expansión binomial, por ejemplo, el renglón cuatro nos da los coeficientes de la expansión del binomio elevado a la cuarta potencia como sigue:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observe los patrones de regularidad en las potencias de los términos a y b mientras las potencias de a decrecen, las potencias de b van creciendo.

Ejemplo 3

Calcula la derivada de $3x^5$.

Nota: la derivada de esta función fue resuelta en el ejemplo 1 de la sección 3.2.3

Solución

La derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^5 - 3x^5}{h}$$

Para desarrollar el binomio usamos el triángulo de pascal

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5) - 3x^5}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^5 + 15x^4h + 30x^3h^2 + 30x^2h^3 + 15xh^4 + 3h^5 - 3x^5}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{15x^4h + 30x^3h^2 + 30x^2h^3 + 15xh^4 + 3h^5}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(15x^4 + 30x^3h + 30x^2h^2 + 15xh^3 + 3h^4)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (15x^4 + 30x^3h + 30x^2h^2 + 15xh^3 + 3h^4)$$

$$f'(x) = 15x^4$$

Es importante que el lector verifique la solución que se ha encontrado y la compare con la solución previa.

Ejemplo 4

Encuentra la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

La derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x = 1$

Solución

La derivada es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

Para calcular este límite recordemos que:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Si consideramos $a = (x+h)^{\frac{1}{3}}$ y $b = x^{\frac{1}{3}}$ tenemos que:

$$x+h-x=\left((x+h)^{\frac{1}{3}}-(x)^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+h)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+(x)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Despejando obtenemos:

$$(x+h)^{\frac{1}{3}}-(x)^{\frac{1}{3}}=\frac{h}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+(x)^{\frac{2}{3}}}$$

Así el límite queda.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+(x)^{\frac{2}{3}}}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+(x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{1}{3}}+(x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Una vez obtenida la deriva es posible encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $x=1$

$$m=f'(1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\frac{1}{3}$$

Con $f(1)=\sqrt[3]{1}$=1, tenemos que el punto de tangencia es (1,1), así la ecuación será:

$$y-1=\tfrac{1}{3}(x-1) \quad \rightarrow \quad x-3y+2=0$$

3.3.3 Ejercicios

3.3.3.1 Encuentra la derivada usando la definición

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para las funciones:

a) $f(x) = 2x^4$
b) $f(x) = 2x - 3$
c) $f(x) = -3x - 3$
d) $f(x) = x^2 + 2x$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x$
g) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$
h) $f(x) = x^6$
i) $f(x) = (x+5)^2$
j) $f(x) = (x-1)^3$

3.4 La regla de la cadena.

Si $f(x)$ es una función compuesta esto es una función formada por la composición de dos funciones, para entender mejor consideremos que si $h(g) = g^3$ y $g(x) = 2x + 1$ entonces $f = g \circ h$ será:

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

Resulta que la derivada de la función compuesta es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama **regla de la cadena**, en otras palabras, si $f = g \circ h$ la derivada será:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Si deseamos conocer la derivada de f con respecto a x, entonces:

$$\frac{dh}{dg} = 3g^2 = 3(2x - 1)^2 \qquad y \qquad \frac{dg}{dx} = 2$$

Así:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x - 1)^3 = [3(2x - 1)^2](2)$$

$$f'(x) = 6(2x - 1)^2$$

Notación

En ocasiones es más sencillo utilizar la llamada notación de Leibnitz:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

ya que nos permite observar respecto de que variable estamos derivando como podemos observar.

En general:

Regla de la cadena

Si f es una función compuesta $f = g \circ h$ y tanto g como h son derivables

Entonces la derivada de $f(x) = g(h(x))$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ejemplo 1

Encuentra la derivada de

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 1}$$

Solución

Esta función puede expresarse como:

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo que su derivada será:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 - 6x)$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x)}{2(x^3 - 3x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x)}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 1}}$$

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x) = (x^2 + 1)^5$ en el punto $x = 0$

Solución

$$f'(x) = 5(x^2 + 1)^4 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = 5(x^2 + 1)^4(2x + 1)$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto $x = 0$. Así:

$$m = f'(0) = 5(1)^4(1) = 5$$

El punto de tangencia es $x = 0$ y $y = f(0) = (1)^5 = 1$ por lo que la ecuación de la recta tangente será:

$$y - 1 = 5(x - 0)$$

$$5x - y + 1 = 0$$

De manera general

Derivada de una función elevada a una potencia

Si $f(x) = (g(x))^n$ su derivada usando la regla de la cadena será:

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

3.4.1 Ejercicios

3.4.1.1 Encuentra la derivada de:

a) $f(x) = 2(3x-1)^4$

b) $f(x) = (x^3+4)^2$

c) $f(x) = (x^2-x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{-3x-3}$

f) $f(x) = (x^2-4x+3)^{-4}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$

h) $f(x) = \sqrt[4]{(x+3)^3}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{(4x-1)^2}$

j) $f(x) = \sqrt{(x^2+2)^3}$

3.5 La derivada de un producto y un cociente de funciones

Existen algunas funciones que están expresadas como un producto o cociente, como se muestra a continuación:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1} \quad o \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

Este es un problema complejo si estamos interesados en conocer la derivada mediante alguno de los límites antes citados.

3.5.1 La derivada de un producto

Por ello propongamos una función que es el producto de dos funciones

$$f(x) = g(x) \cdot i(x)$$

La derivada de será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)i(x+h) - g(x)i(x)}{h}$$

Sumemos un cero

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)i(x+h) - g(x)i(x) + g(x+h)i(x) - g(x+h)i(x)}{h}$$

Esto permite agrupar de la siguiente manera

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)[i(x+h) - i(x)] + i(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)[i(x+h) - i(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{i(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{[i(x+h)-i(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} i(x)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

Al tomar el limite tenemos que:

$$f'(x) = g(x)i'(x) + i(x)g'(x)$$

La expresión anterior nos permite derivar un producto de funciones.

Si usamos la notación de Leibnitz la expresión anterior también se puede expresar de la siguiente manera:

$$f'(x) = g(x)\frac{d}{dx}i(x) + i(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

Ejemplo 1

Encuentra la derivada de:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$

Solución

Aplicando la relación anterior:

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}\frac{d}{dx}x$$

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2x+1)\right) + \sqrt{2x+1}\cdot(1)$$

$$f'(x) = x\left((2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right) + \sqrt{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{2x+1}$$

Sumando las fracciones para simplificar:

$$f'(x) = \frac{x + (2x + 1)}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$$

Ejemplo 2

La posición de un objeto en metros que se desplaza en el tiempo a partir del primer segundo está dada por la expresión $f(t) = \frac{4t^2}{t^2+1}$. Calcula su velocidad al tiempo $t = 3s$

Solución

$$f(t) = (4t^2)(t^2 + 1)^{-1}$$

Así la velocidad de la partícula al tiempo t será:

$$f'(t) = v'(t) = (4t^2)\frac{d}{dt}(t^2 + 1)^{-1} + (t^2 + 1)^{-1}\frac{d}{dt}(4t^2)$$

$$v'(t) = -(4t^2)(t^2 + 1)^{-2}\frac{d}{dt}(t^2 + 1) + (t^2 + 1)^{-1}(8t)$$

$$v'(t) = -\frac{(4t^2)(2t)}{(t^2 + 1)^2} + \frac{8t}{(t^2 + 1)} = -\frac{8t^3}{(t^2 + 1)^2} + \frac{8t}{(t^2 + 1)}$$

Sumando las fracciones para simplificar tenemos que:

$$v'(t) = \frac{-8t^3 + 8t(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-8t^3 + 8t^3 + 8t}{(t^2 + 1)^2}$$

Así la velocidad es:

$$v'(t) = \frac{8t}{(t^2 + 1)^2}$$

La velocidad a los tres segundos será:

$$v'(3) = \frac{8(3)}{((3)^2+1)^2} = \frac{24}{100} = 2.4\frac{m}{s}$$

En la literatura es muy común utilizar la siguiente notación

Haciendo $u = g(x)\ \ y\ \ v = i(x)\ entonces\ \ u' = \frac{d}{dx}g(x)\ \ y\ \ \ v' = \frac{d}{dx}i(x)$

Así la derivada de un producto de funciones se puede expresar como:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot v' + v \cdot u'$$

3.5.2 La derivada de un cociente de funciones.

Determinemos ahora una relación que nos permita establecer la derivada de una función de la forma:

$$f(x) = \frac{i(x)}{g(x)}$$

Para ello sabemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Así:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{i(x+h)}{g(x+h)} - \frac{i(x)}{g(x)}}{h}$$

Al sumar la fracción obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{i(x+h)g(x) - g(x+h)i(x)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

Sumando un cero:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{i(x+h)g(x) - g(x+h)i(x) + i(x)g(x) - i(x)g(x)}{h \cdot g(x+h)g(x)}$$

Se puede agrupar de la siguiente manera:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x)[i(x+h) - i(x)] - i(x)[g(x+h) - g(x)]}{h \cdot g(x+h)g(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)} \left[\frac{[i(x+h) - i(x)]}{h}\right] - \lim_{h \to 0} \frac{i(x)}{g(x+h)g(x)} \left[\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}\right]$$

Al tomar el límite:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{g(x)g(x)} i'(x) - \frac{i(x)}{g(x)g(x)} g'(x)$$

Así la derivada de un cociente de funciones será:

$$f'(x) = \frac{g(x)i'(x) - i(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

A continuación, presentamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Encuentra la derivada de

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$$

Solución

Aplicando la relación obtenida tenemos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(4x^2) - 4x^2\dfrac{d}{dx}(x^2+1)}{[x^2+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(8x) - 4x^2(2x)}{[x^2+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 + 8x - 8x^3}{[x^2+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{[x^2+1]^2}$$

Recomendamos al lector revisar el Ejemplo 2 de la sección 3.5.2.

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Solución

La derivada es:

$$f'(x) = \frac{(x+1)\dfrac{d}{dx}(1) - (1)\dfrac{d}{dx}(x+1)}{[x+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{[x+1]^2}$$

Así la pendiente en el punto $x = 1$ es:

$$f'(1) = \frac{-1}{[1+1]^2} = -\frac{1}{4}$$

3.5.3 Ejercicios

3.5.3.1 Encuentra la derivada de:

a) $f(x) = (3x^3 - 9)(x^2 + 3)$

b) $f(x) = 5x^4(x^2 - 3x + 1)$

c) $f(x) = x^2(2x + 1)^3$

d) $f(x) = (5x - 4)^9(3x - 2)^6$

e) $f(x) = x + x(x - 1)^4$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

g) $f(x) = \frac{2x^3-1}{x}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

i) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

j) $f(x) = \left(\frac{2-2x^2}{\sqrt{x}}\right)^4$

k) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt{2x+3}}$

l) $f(x) = \frac{(2x-1)^3}{x^2+1}$

3.5.3.1 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función:

a) $f(x) = (2x - 1)(3x + 2) \quad en \quad x = 0$

b) $f(x) = (2x)(x - 2)^4 \quad en \quad x = 1$

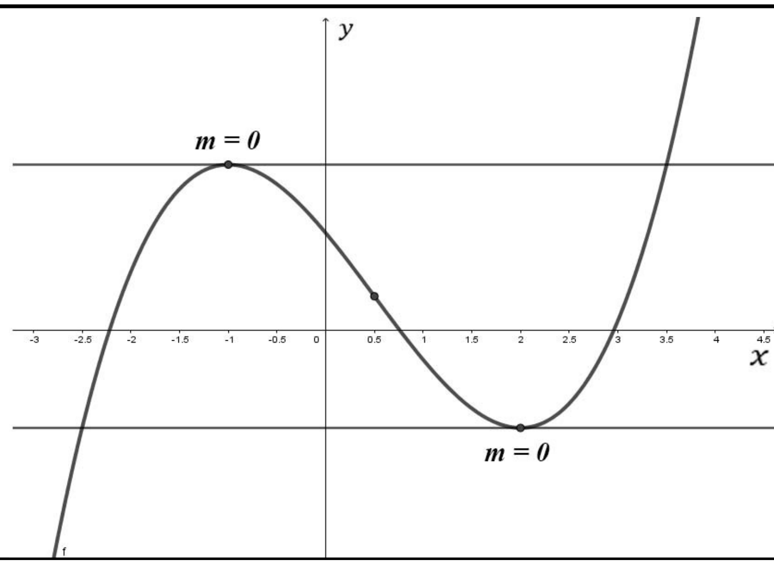
c) $f(x) = (x + 2)(2x - 1)^3 \quad en \quad x = -2$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad en \quad x = 1$

e) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \quad en \quad x = 1$

Unidad 4

Comportamiento Gráfico y problemas de optimización

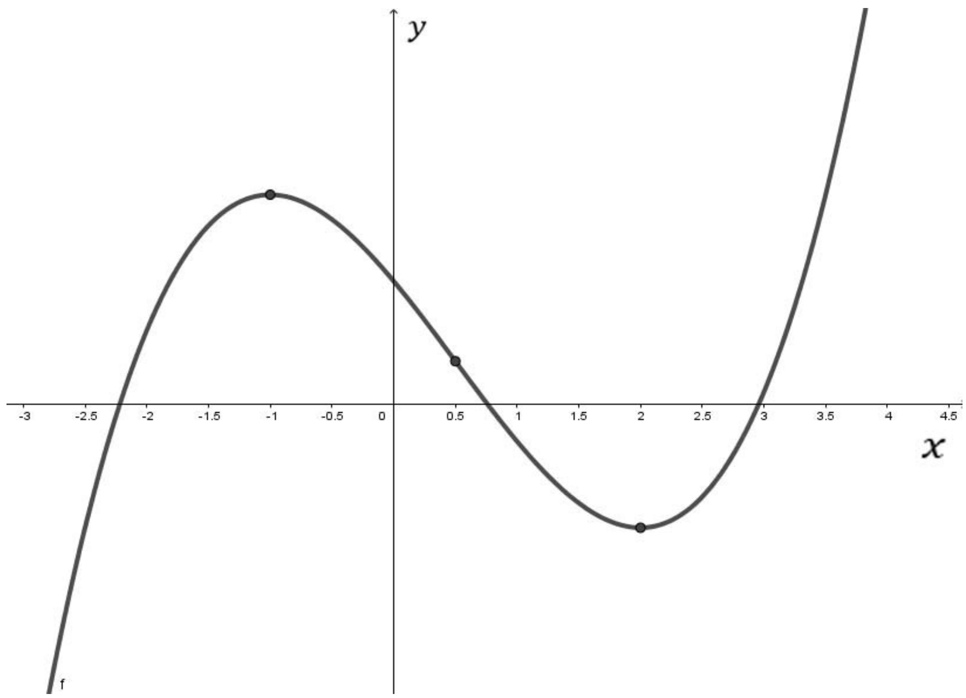


Objetivos específicos:

- Reconocerá en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas
- Reconocerá y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.
- Utilizará a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.
- Calculará la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.
- Interpretará en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.

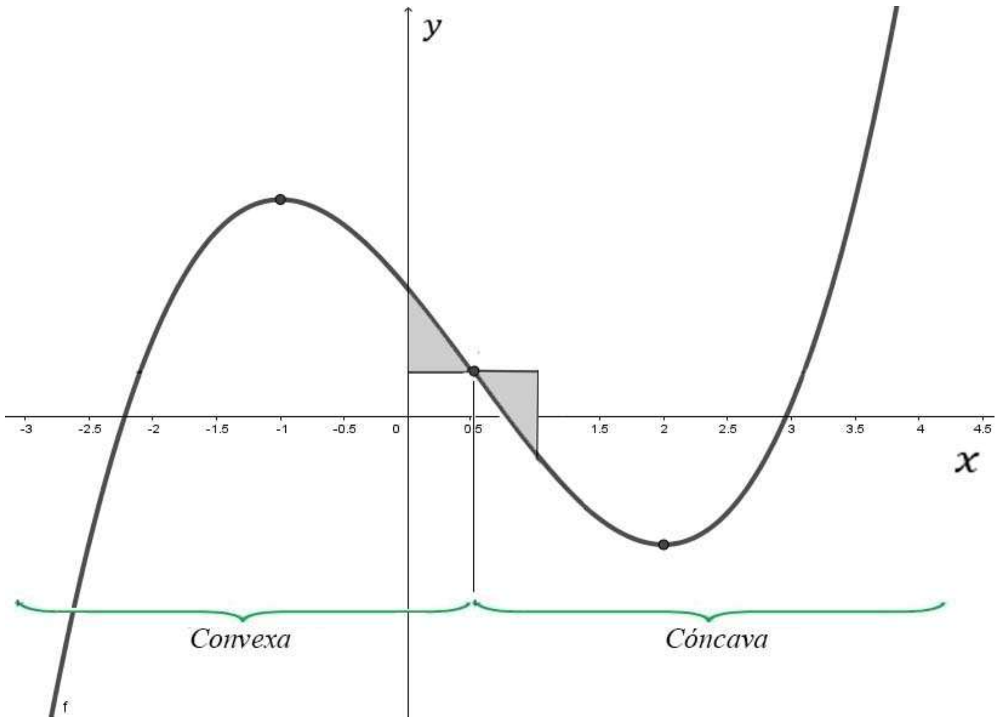
4.1 Comportamiento gráfico

La derivada nos permite realizar un análisis grafico de una función en el plano cartesiano, todo ello a partir del concepto de la pendiente. Para ello, analicemos la siguiente gráfica.



Como podemos observar esta grafica tiene cierto comportamiento al respecto podemos decir que:

1. La función es creciente en el intervalo de $(-\infty, -1)$, también podemos decir que la función es decreciente en el intervalo $(-1,2)$ y que nuevamente esta función es creciente en el intervalo de $(2, \infty)$
2. La función tiene un valor máximo local en $x = -1$
3. La función tiene un valor mínimo local en $x = 2$
4. Existe un cambio de concavidad como se puede observar en la figura:



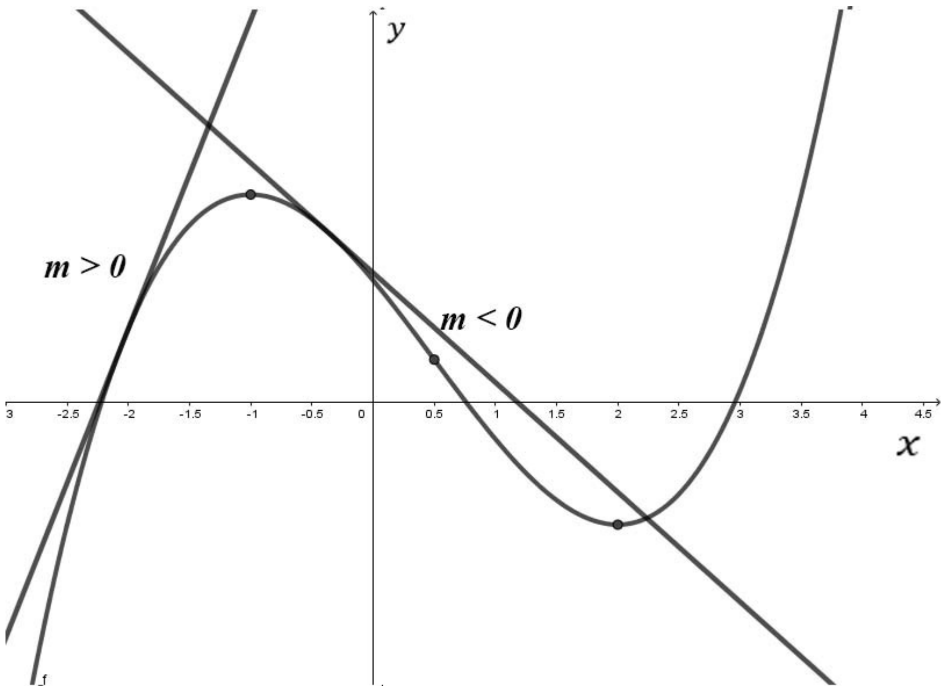
La función pasa de ser ***cóncava hacia abajo*** (convexa) a ser **cóncava hacia arriba** (cóncava), el punto donde ocurre el cambio de concavidad se llama **punto de inflexión,** en este caso:

1. La función es cóncava hacia abajo en el intervalo de $(-\infty, 0.5)$
2. La función es cóncava hacia arriba en el intervalo de $(0.5, \infty)$
3. El punto $x = \frac{1}{2}$ es un punto de inflexión.

Con estos elementos es posible dada una función hacer un análisis gráfico para así poder obtener su gráfica.

4.1 Crecimiento y decrecimiento de una función

Una función es creciente siempre que la pendiente de la recta tangente sea positiva, mientras que ésta será decreciente si la pendiente de la recta tangente es negativa, como se puede apreciar en la siguiente figura:



Como podemos observar la pendiente de la recta tangente es positiva en todo el intervalo donde la función es creciente, mientras que la pendiente de la recta es negativa en todo el intervalo, dado que la pendiente y la derivada están relacionadas podemos afirmar:

1. Si $f'(x) > 0$ en todo un intervalo la función será creciente en ese intervalo.
2. Si $f'(x) < 0$ en todo un intervalo la función será decreciente en ese intervalo.

Por ejemplo, si tenemos la función:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$$

es posible encontrar sus intervalos de crecimiento, para ello establezcamos en primer lugar el valor de su derivada es:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

Que se puede factorizar como:

$$f'(x) = 6(x - 2)(x + 1)$$

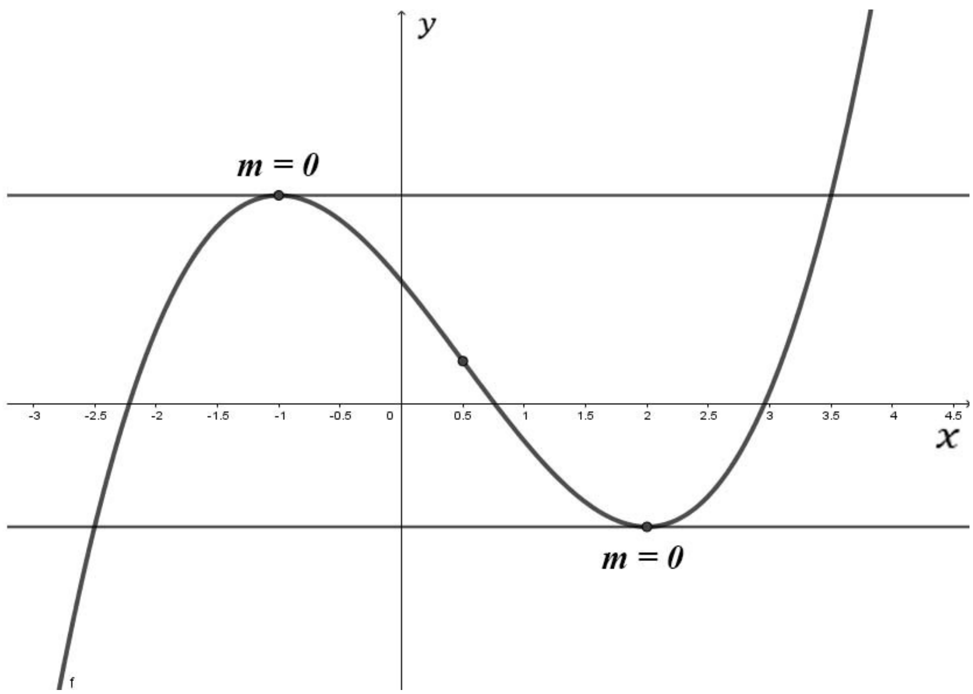
Los valores $x = -1\ y\ x = 2$ son los puntos críticos de la función que hemos obtenido al derivar, en otras palabas, alrededor de estos valores existe un cambio en el signo de la derivada por lo que podemos observar el comportamiento de la misma mediante la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de la derivada $f'(x)$ en el intervalo. Tomamos un valor en el intervalo.	$f'(x)$	La función es creciente o decreciente
$(-\infty, -1)$	$f'(2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12 = 24$	$+$	Creciente
$(-1,2)$	$f'(0) = 6(0)^2 - 6(0) - 12 = -12$	$-$	Decreciente
$(2, \infty)$	$f'(3) = 6(3)^2 - 6(3) - 12 = 24$	$+$	Creciente

Notemos que la tabla es de mucha ayuda para poder determinar los intervalos de crecimiento.

4.1.1 Valores máximos o mínimos locales

Es importante para poder obtener la gráfica de una función los valores máximos y mínimos locales, para entender consideremos la siguiente figura:



Como se puede observar en los puntos donde la función tiene un máximo local o un mínimo local la pendiente de la recta tangente es igual a **cero**.

En general los valores máximos y mínimos de una función se pueden obtener al resolver la ecuación:

$$f'(x) = 0$$

En el ejemplo que venimos trabajando con: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ tiene su valor máximo y mínimo cuando su derivada $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ es igual a cero, en otras palabras:

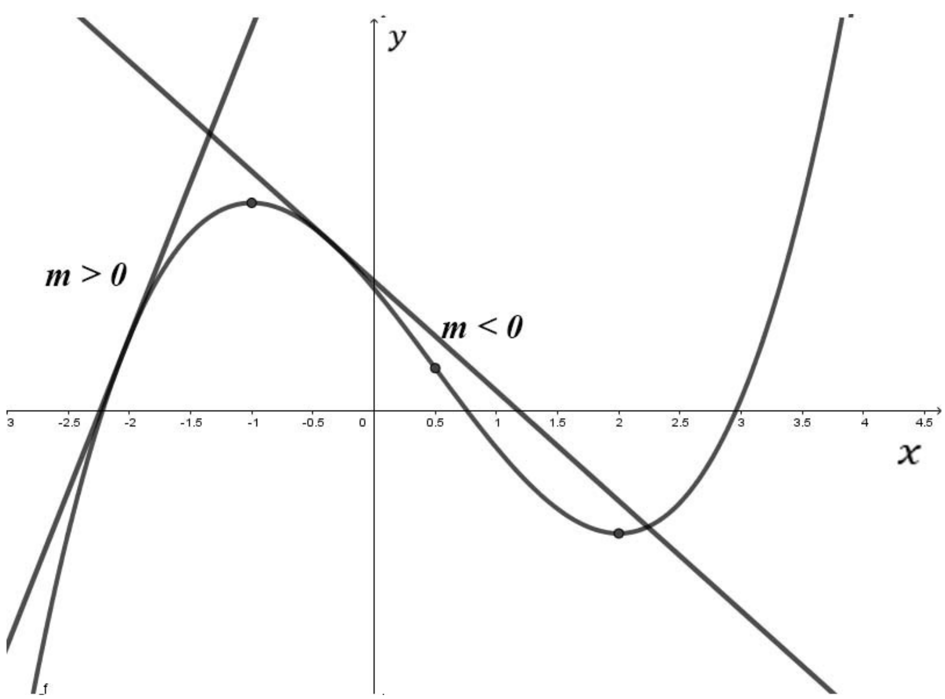
$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

Cuya solución es $x = -1$ y $x = 2$, en estos puntos la derivada es cero por lo tanto la pendiente de la recta tangente en ellos es cero, a estos puntos se les llama **Puntos críticos.**

Debemos notar que en los puntos críticos es en donde la función puede tener ya sea un valor máximo o valor mínimo. Para saber si en un punto crítico existe un valor máximo o un valor es necesario establecer ciertos criterios.

4.1.2 Criterio de la primera derivada

Para poder establecer un criterio que nos permita decir cuál de los puntos críticos de una función corresponde a un máximo o a un mínimo consideremos la siguiente gráfica:



Como podemos observar, en $x = -1$ hay un máximo local y alrededor de este punto las pendientes de las rectas tangentes pasan de ser positivas a negativas, mientras que en $x = 2$ hay un máximo local y alrededor de este punto las pendientes de las rectas tangentes pasan de ser negativas a positivas.

En otras palabras, si una función pasa de ser creciente a decreciente alrededor de un punto crítico en dicho punto habrá un valor máximo, mientras que, si una función pasa de ser decreciente a creciente en un punto crítico, en él habrá un valor mínimo.

Ejemplo 1.

Determina los puntos críticos de la función $f(x) = x^3$ y determina si estos corresponden a un valor máximo o mínimo.

Solución

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2$, para encontrar los puntos críticos debemos saber cuando la primera derivada es cero, esto significa que debemos resolver la ecuación:

$$3x^2 = 0$$

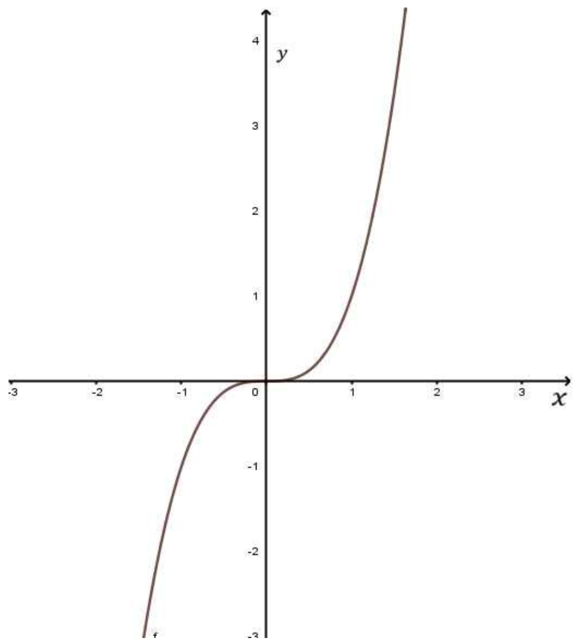
Es claro que la única solución de esta ecuación es el punto $x = 0$

¿Hay en el punto crítico $x = 0$ un máximo o un mínimo? Para dar respuesta a esta pregunta utilicemos lo aprendido, veamos los intervalos de crecimiento alrededor del punto $x = 0$

Intervalo	Valor de la derivada $f'(x)$ en el intervalo.	$f'(x)$	La función es creciente o decreciente
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$	$+$	Creciente
$(0, \infty)$	$f'(1) = 3(1)^2 = 3$	$+$	Creciente

No hay un cambio de creciente a decreciente o viceversa. La función siempre es creciente.

Esto significa que no podemos asegurar que la función tenga un valor máximo o mínimo. Para ver que ha pasado observemos la gráfica de la función:



Como podemos ver la función tiene un cambio de concavidad, es decir la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$

De manera general:

Criterio de la Primera Derivada

Suponga que x_0 es un Punto crítico de una función $f(x)$, esto es $f'(x_0) = 0$ entonces:

1. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en x_0, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en x_0.
2. Si $f'(x)$cambia de negativa a positiva en x_0, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en x_0.
3. Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de x_0, entonces $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos locales en x_0.

Ejemplo 2

Determinar los valores máximos, mínimos locales, intervalos de crecimiento para la función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$$

Solución

Para encontrar los valores máximos y mínimos es necesario encontrar los puntos críticos de la función, estos se obtienen cuando la derivada es igual a cero, por lo que resolveremos la ecuación

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0$$

En nuestro problema:

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

Dado que los Puntos críticos de la función ocurren cuando la derivada es cero debemos resolver:

$$x^2 - 2x = 0$$

Factorizamos la ecuación y tenemos que:

$$x(x-2) = 0$$

Por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$x = 0 \text{ y } x = 2$$

Hemos encontrado dos puntos críticos de la función, para saber si estos corresponden a un máximo o mínimo, utilicemos el criterio de la primera derivada, para ello utilicemos la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de la derivada $f'(x)$ en el intervalo.	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$	$+$	Creciente
$(0,2)$	$f'(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$	$-$	Decreciente
$(2, \infty)$	$f'(3) = (3)^2 - 2(3) = 3$	$+$	Creciente

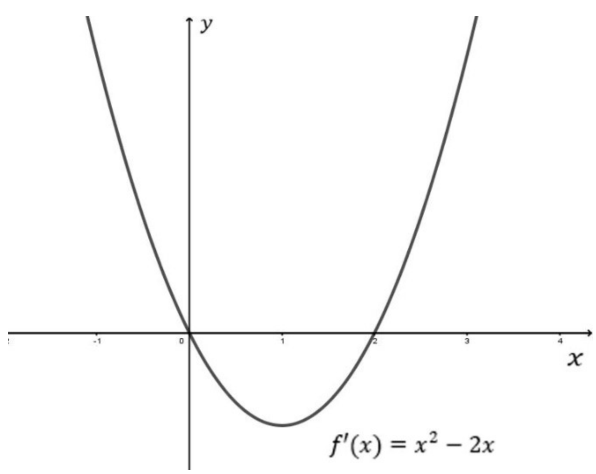
Donde se desprende que:

a) Como la función $f(x)$ cambia de creciente a decreciente en el punto $x = 0$ podemos afirmar que en $x = 0$ la función tiene un valor máximo.
b) Como la función $f(x)$ cambia de decreciente a creciente en el punto $x = 2$ podemos afirmar que en $x = 2$ la función tiene un valor mínimo.
c) La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$
d) La función es decreciente en el intervalo $(0,2)$

Para poder tener una mejor aproximación a la gráfica de una función es necesario conocer también los intervalos de concavidad de la función:

4.1.3 Concavidad de una función y puntos de inflexión

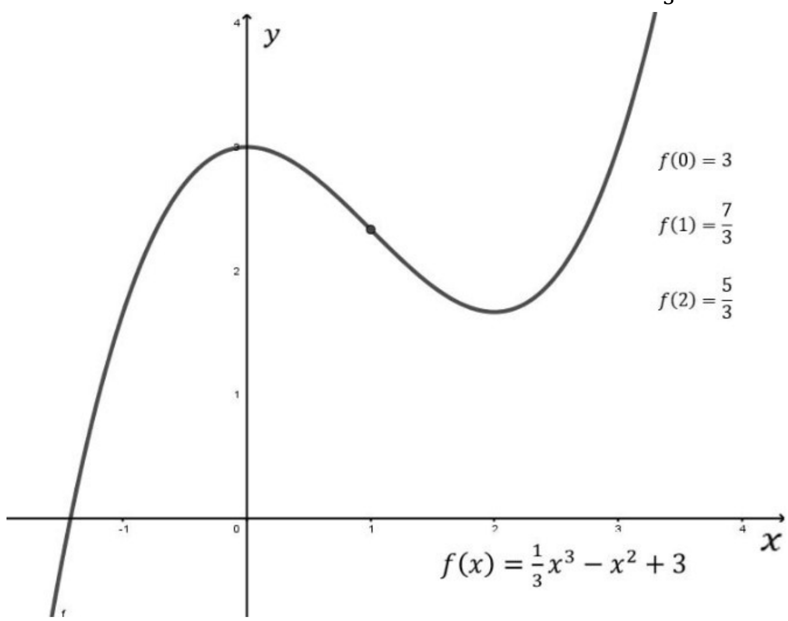
Para obtener los intervalos de concavidad utilizaremos a la segunda derivada continuando con el ejemplo anterior, la gráfica de la derivada $f'(x) = x^2 - 2x$ es:



Cómo se puede observar:

1. La función derivada es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ por lo que la derivada de esta función o segunda derivada será negativa en el intervalo y por ello la función será cóncava hacia abajo.
2. La función derivada creciente en el intervalo $(1, \infty)$ por lo que la segunda derivada será positiva y por ello la función será cóncava hacia arriba

A continuación, presentamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$



Como podemos observar la gráfica de la función corresponde con todos los elementos que hemos estimado.

De manera general:

Prueba de Concavidad

1. Si $f''(x) > 0$ para todo valor de x en un intervalo, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo valor de x en un intervalo, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo.

El punto x_0 donde la función cambia de concavidad recibe el nombre de **punto de inflexión** y se obtiene al resolver la ecuación:

$$f''(x) = 0$$

4.1.4 Criterio de la segunda derivada.

Otra aplicación de la segunda derivada es que nos permite obtener un criterio para encontrar los valores máximo y mínimo de una función.

Criterio de la Segunda Derivada

Suponga que x_0 es un punto crítico de una función $f(x)$, esto es $f'(x_0) = 0$ entonces:

1. Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo en x_0
2. Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x)$ tiene un máximo local en x_0.
3. Si $f''(x_0) = 0$ entonces x_0 es punto de inflexión

Ejemplo 1

Determinar los valores máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión, concavidad para la función:

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 2$$

Solución

Para encontrar los valores máximos y mínimos es necesario encontrar los Puntos críticos de la función, estos se obtienen cuando la derivada es igual a cero, por lo que resolveremos la ecuación

$$f'(x) = 0$$

En nuestro problema

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12$$

Por lo que debemos resolver la ecuación $-6x^2 - 6x + 12 = 0$

$$-6(x^2 + x - 2) = 0$$

Así tenemos que:

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

Por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$x = -2 \text{ y } x = 1$$

Hemos encontrado dos Puntos críticos de la función, para saber si estos corresponden a un máximo o mínimo, utilicemos el criterio de la segunda derivada. Derivando nuevamente encontramos:

$$f''(x) = -12x - 6$$

Al evaluar en los Puntos críticos $x = -2$ y $x = 1$

$$f''(-2) = -12(-2) - 6 = 18$$
$$f''(1) = -12(1) - 6 = -18$$

Por lo dicho anteriormente concluimos que:

1. La función $f(x)$ tiene un valor mínimo en $x = -2$
2. La función $f(x)$ tiene un valor máximo en $x = 1$

Determinemos ahora los puntos de inflexión de la función, para ello debemos encontrar cuando la segunda derivada es igual a cero. Es decir, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$f''(x) = 0$$

En nuestro caso la ecuación es:

$$-12x - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

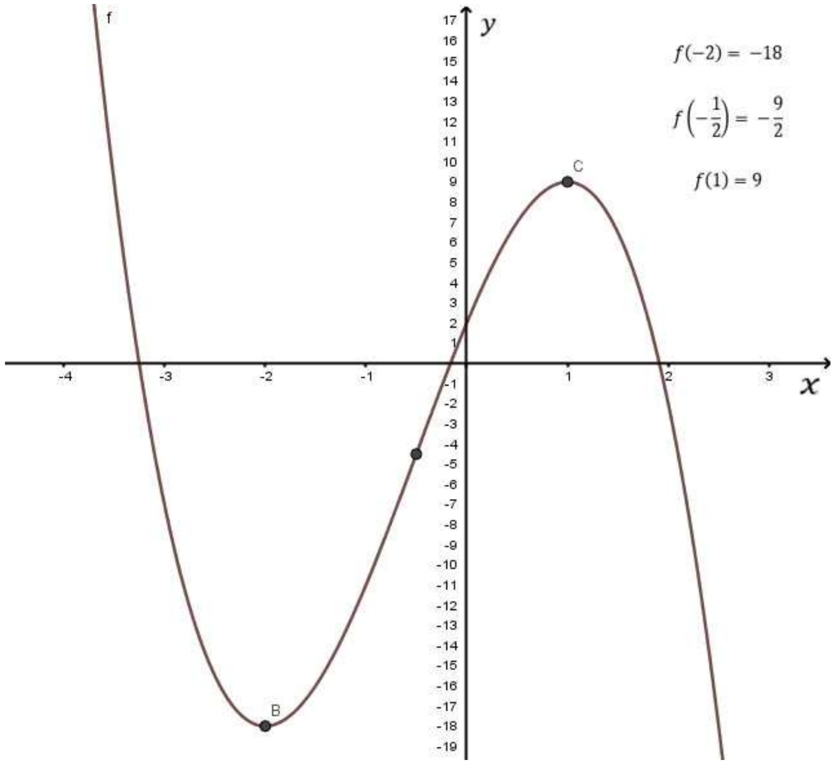
$$x = -\frac{1}{2}$$

Es en este punto donde tendremos el único punto de inflexión de la función es decir la función tendrá un cambio de concavidad.

Ahora sólo nos falta determinar los intervalos de concavidad. Para ello recordemos que si la segunda derivada de la función es positiva entonces es cóncava hacia arriba, y si la segunda derivada de la función es negativa entonces la función es cóncava hacia abajo, para ello ayudémonos de la siguiente tabla

Intervalo	Valor de la derivada $f''(x)$ en el intervalo.	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$f''(-2) = -12(-2) - 6 = 18$	$+$	Cóncava hacia arriba
$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$	$f'(1) = -12(0) - 6 = -6$	$-$	Cóncava hacia abajo

A continuación presentamos la gráfica de la función:



4.2 Problemas de Optimización

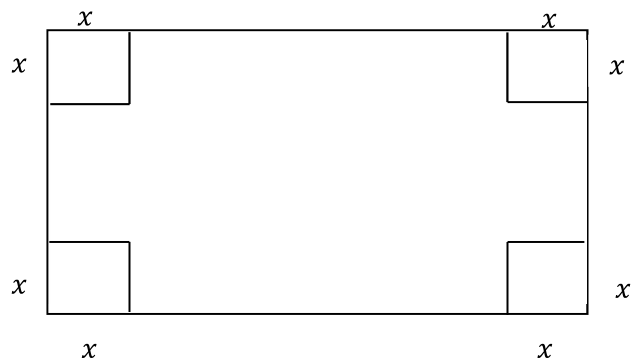
Existen muchos problemas que requieren encontrar los valores óptimos, por ejemplo, ¿Cuál es el valor que produce costo máximo o mínimo por la venta de algún artículo?, ¿Cuál es la cantidad de sustancia que debe tomar un deportista para tener su máximo rendimiento?, etc., si podemos establecer una función que relacione las variables de interés es posible mediante la herramienta del cálculo encontrar los valores optimizan dicha función.

Ejemplo 1

De una lámina de 120cm x 75cm. Se desea construir una caja sin tapa, del mayor volumen posible recortando cuadros iguales de las esquinas de la lámina y doblando hacia arriba las salientes para tomar las caras laterales

Solución

Debemos cortar los cuadros como se muestra en la figura:



Ahora, escribiremos el volumen de la caja como función del lado x que cortaremos. El volumen de la caja es igual al producto del área de la base por la altura, en nuestro problema el área de la base está dada por la expresión

$$A(x) = (120 - 2x)(75 - 2x)$$

$$A(x) = 9000 - 390x + 4x^2$$

En este caso al doblar las esquinas es claro que la caja tendrá una altura x, es decir:

$$V = Ax$$

Sustituyendo la expresión para el área encontramos:

$$V(x) = (9000 - 390x + 4x^2)x$$

$$V(x) = 9000x - 390x^2 + 4x^3$$

Esta es la expresión para el volumen de la caja como función del tamaño de los cortes. Para determinar los valores máximos y mínimos de esta función es necesario derivar e igualar a cero para obtener los Puntos críticos.

$$V'(x) = 9000 - 780x + 12x^2$$

Igualando a cero para encontrar los Puntos críticos de la función tenemos:

$$9000 - 780x + 12x^2 = 0$$

Para resolver la ecuación, utilizaremos la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema:

$$a = 12 \qquad b = -780 \qquad c = 9000$$

Por lo que las soluciones de esta ecuación son:

$$x_1 = 50 \qquad\qquad x_2 = 15$$

Recordemos que si evaluamos los Puntos críticos en la segunda derivada tendremos:

$$f''(x) = -780 + 24x$$

Al evaluar en los Puntos críticos $x = 50$ y $x = 15$

$$f''(50) = -780 + 24(50) = 420$$
$$f''(15) = -780 + 24(15) = -420$$

Por lo que podemos concluir que:

1. Hay un mínimo en $x = 50$
2. Hay un máximo en x =15.

Es decir, cuando hacemos un corte de 15cm para hacer la caja tenemos que el volumen es máximo, el cual es:

$$V(x) = 9000x - 390x^2 + 4x^3$$

$$V(10) = 9000(15) - 390(10)^2 + 4(10)^3$$

$$V_{max} = 60750cm^3$$

$$V_{max} = 60.75lt$$

Ejemplo 2

Un productor dispone de 600 hectáreas aptas para sembrar. Sabe que la ganancia total G en $ que obtendrá de su producción va a depender del número de hectáreas sembradas x, de acuerdo a la expresión:

$$G(x) = 2000x - 2x^2$$

a) Calcula cuántas hectáreas debería sembrar para obtener **máxima** ganancia.

b) ¿Cuánto disminuiría su ganancia si sembrara las 600 hectáreas disponibles?

Solución

a) Para determinar la máxima ganancia derivemos la función G con respecto a la variable x:

$$G'(x) = 2000 - 4x$$

Igualando a cero para encontrar los Puntos críticos encontramos:

$$2000 - 4x = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$x = \frac{2000}{4} = 500$$

Este valor de x maximiza o minimiza la función G. Para saber si es máximo o mínimo utilicemos el criterio de la segunda derivada.

$$G''(x) = -4$$

La segunda derivada siempre es negativa para cualquier valor de x, por lo que tenemos un valor máximo en $x = 500$

Lo cual significa que si sembramos sólo 500 hectáreas de las 600 hectáreas que se disponen obtendremos una ganancia mayor.

b) Para calcular en cuánto disminuiría la ganancia primero debemos ver cuál es la ganancia por 500 hectáreas y después restar la ganancia que se obtiene al sembrar 600

Para 500 hectáreas:

$$G(x) = 2000x - 2x^2$$

$$G(500) = 2000(500) - 2(500)^2$$

$$G(500) = 500000\$$$

Para 600 hectáreas:

$$G(x) = 2000x - 2x^2$$

$$G(600) = 2000(600) - 2(600)^2$$

$$G(600) = 480000\$$$

Por lo que si se siembran las 600 hectáreas la ganancia disminuiría en total:

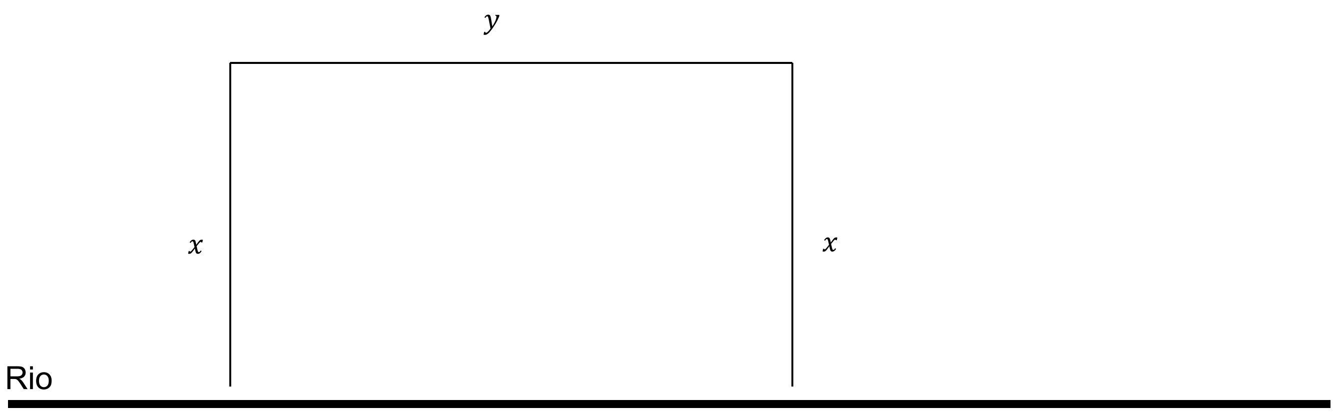
$$G(500) - G(600) = 500000\$ - 480000\$ = 20000\$$$

Ejemplo 3

Sobre la orilla de un río se desea alambrar una superficie rectangular de 10 hectáreas. ¿Cuál es la dimensión que debe tener rectángulo para que el costo por alambrar sea mínimo? Si el alambrado se construye con 5 hilos y el rollo de 1.000 m vale 35$ calcula además el costo del alambre necesario. Nota: No se alambra el lado junto a la orilla del río.

Solución

Veamos la siguiente figura:



Como tenemos 5 hilos, la cantidad de alambre será entonces

$$p = 10x + 5y \;\; m$$

El costo total será la cantidad de alambre por lo que cuesta, si sabemos que el costo es de 35$ por cada mil metros, es decir $\frac{35}{1000}\frac{\$}{m}$. En nuestro problema la función costo es:

$$C = (10x + 5y)m\left(\frac{35}{1000}\right)\frac{\$}{m}$$

$$C = \frac{7}{20}x + \frac{7}{40}y \qquad (1)$$

Esta ecuación representa el costo por alambrar el terreno como función de los dos lados. Considerando además que:

$$A = xy$$

Como el área es de 10 hectáreas, o bien 100 000 m^2, tenemos:

$$xy = 100000$$

Despejando a y se obtiene:

$$y = \frac{100000}{x} \tag{2}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1)

$$C = \frac{7}{20}x + \frac{7}{40}y$$

$$C = \frac{7}{20}x + \frac{7}{40}\left(\frac{100000}{x}\right)$$

$$C(x) = \frac{7}{20}x + \frac{17500}{x}$$

Esta expresión nos dice el costo por alambrar como función del lado x. Para determinar el costo mínimo derivemos esta función.

$$C'(x) = \frac{7}{20} - \frac{17500}{x^2}$$

Igualando a cero para conocer los Puntos críticos tenemos:

$$\frac{7}{20} - \frac{17500}{x^2} = 0$$

$$\frac{7x^2 - (20)17500}{20x^2} = 0$$

Esta expresión es cero si el numerador es cero, es decir;

$$7x^2 - (20)17500 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{20(17500)}{7}}$$

$$x \cong 223.606m$$

Veamos si este es máximo o mínimo.

$$C''(x) = \frac{2(17500)}{x^3}$$

Es claro que al evaluar el punto $x \cong$ 223.606 el resultado de la segunda derivada será positivo ya que el cociente será positivo, por lo que podemos afirmar que en este valor de x tenemos un mínimo.

Sólo falta determinar la longitud del lado y para ello evaluemos este valor de x en 2.

$$y = \frac{100000}{x}$$

$$y \cong \frac{100000}{223.606} \cong 447.213m$$

Así, las dimensiones para el rectángulo de mínimo costo son:

$x \cong 223.606m$; $y \cong 447.213m$

Si deseamos obtener el costo total sustituimos esto valores en la ecuación (1)

$$C = \frac{7}{20}x + \frac{7}{40}y$$

$$C \cong \frac{7}{20}(223.606) + \frac{7}{40}(447.213)$$

$$C \cong 156.524\$$$

4.3 Razón de Cambio

Como hemos mencionado con anterioridad el concepto de razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. La razón de cambio compara dos variables, la más frecuente es la velocidad que es una razón entre distancia y tiempo, existen muchos problemas donde es importante conocer cómo cambia una variable con respecto a otra. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 1

La ley de Boyle para los gases ideales establece que a temperatura constante el producto de la presión P por el volumen V es una constante k**.** Es decir, $PV = k$

Si la presión para un gas ideal como función del tiempo t está dada por la expresión: $P(t) = 15 + 2t^2$ cm hg (centímetros de mercurio) y el volumen inicial es de $20cm^3$. Determina la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos.

Solución

Debemos determinar la razón de cambio del volumen respecto al tiempo lo que significa que debemos encontrar:

$$\frac{dV}{dt}$$

Para ello usaremos la ley de Boyle $PV = k$, y la derivaremos de ambos lados de la igualdad con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{d(PV)}{dt} = \frac{dk}{dt}$$

El término de la izquierda se deriva como un producto de funciones mientras que el término de la derecha es la derivada de una constante, por lo que obtendremos:

$$P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt} = 0$$

Despejando obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (1)$$

En el problema tenemos que la presión como función del tiempo es $P(t) = 15 + 2t^2$ por lo que lo derivaremos respecto al tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(15 + 2t^2)$$

$$\frac{dP}{dt} = 4t$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (1) y se obtiene que

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{P}(4t) \qquad (2)$$

Esta expresión representa la razón de cambio del volumen para cualquier tiempo. Nos piden calcular esta razón en el tiempo $t = 10s$, por lo que debemos determinar el volumen y la presión a los 10 segundos. Para ello primero determinemos el valor de la constante k. Inicialmente tenemos que el volumen al tiempo $t = 0$ el volumen es de $20cm^3$, es decir; $V(0) = 20$ y la presión en ese tiempo es:

$$P(0) = 15 + (0)^2$$

$$P(0) = 15$$

Sustituimos estos valores en la ley de Boyle:

$$P(0)V(0) = k$$

$$(15)(20) = k$$

$$300 = k$$

Así, para este gas ideal la ley de Boyle es:

$$PV = 300 \qquad (3)$$

Ahora encontremos el valor de la presión al tiempo $t = 10s$:

$$P(10) = 15 + (10)^2$$

$$P(10) = 115cm\ hg$$

Para encontrar el volumen al tiempo $t = 10s$ utilizaremos la ecuación (3)

$$P(10)V(10) = 300$$

Despejando el volumen y sustituyendo el valor de $P(10)$ obtenemos:

$$V(10) = \frac{300}{P(10)} = \frac{300}{115}$$

$$V(10) = \frac{60}{23} \approx 2.6087cm^3$$

Finalmente sustituimos los valores de la presión y el volumen al tiempo $t = 10s$ en la ecuación (2).

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{P}(4t)$$

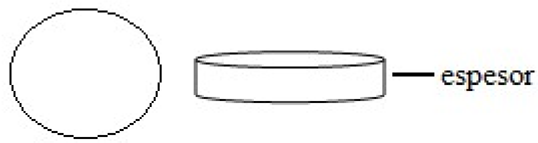
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2.6087}{115}(4(10))$$

$$\frac{dV}{dt} = -0.9074\ \frac{cm^3}{s}$$

El signo negativo significa que el gas está siendo comprimido, esto se puede ver fácilmente por que inicialmente el volumen es de $20cm^3$ y a los 10 segundo ha reducido aproximadamente a $2.06cm^3$ con una rapidez de $0.9074\ \frac{cm^3}{s}$. Podemos decir entonces que el volumen disminuye aproximadamente un centímetro cubico por segundo, cuando han transcurrido 10 segundos.

Ejemplo 2

Se dejan caer $3cm^3$ de aceite en agua, formándose un cilindro circular como se muestra en la figura.



Calcula la rapidez con que cambia el radio de la mancha cuando el radio es de 5 cm, si el espesor disminuye a razón de $5x10^{-3}\frac{cm}{s}$ en el instante en el que el radio es de 5cm.

Solución

Debemos encontrar la razón de cambio del radio, esto es debemos obtener.

$$\frac{dr}{dt}$$

Para ello recordemos que el volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Donde r es el radio del cilindro y h es la altura del cilindro, en este caso representa el espesor. Derivamos ambos lados de la igualdad.

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{d}{dt}(r^2 h)$$

En el problema es claro que el volumen de aceite permanece constante ya que la cantidad de aceite no cambia, así la derivada del lado derecho es la derivada de una constante y la derivada del lado izquierdo es la de un producto de funciones.

$$0 = \pi\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

Despejando obtenemos:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2h}\frac{dh}{dt} \tag{1}$$

En el problema:

$$\frac{dh}{dt} = -0.005\frac{cm}{s}$$

El signo menos indica que la razón de cambio del espesor en el tiempo, está disminuyendo. Sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2h}(-0.005)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{0.005r}{2h} \tag{2}$$

Esta expresión nos indica la razón de cambio del radio para cualquier tiempo t. Nos piden determinarlo cuando radio es de 5cm. Nos falta conocer el espesor "h", para calcularlo utilizaremos la expresión para el volumen

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando y sustituyendo los valores de volumen y radio tenemos:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{3cm^3}{\pi(5cm)^2} = 0.0382cm$$

Finalmente sustituiremos estos valores en la ecuación (2)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{0.005r}{2h}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5(0.005)}{2(0.0382)}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.3272\frac{cm}{s}$$

Lo cual indica que el radio se expande con una rapidez de $3.2mm$ por segundo en el instante que el radio es de 5cm.

Ejemplo 3

Un globo esférico se llena con gas con una rapidez de $50\frac{lt}{min}$ (Litros por minuto). Suponiendo que la presión del gas es constante, encuentra la rapidez con que aumenta el radio r del globo en el instante en que $r = 0.3m$

Solución

Nos piden la rapidez con que aumenta el radio del globo, es decir debemos determinar:

$$\frac{dr}{dt}$$

Para ello recordemos que el volumen de una esfera esta dado por la siguiente expresión:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Derivamos con respecto al tiempo ambos lados de la igualdad

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Despejando:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt} \tag{1}$$

En el problema nos dicen que:

$$\frac{dV}{dt} = 50 \frac{lt}{min}$$

Recordando que $1lt = 1000cm^3$ tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 50000 \frac{cm^3}{min}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{50000}{4\pi r^2} \tag{2}$$

Esta expresión nos da la razón de cambio del radio en cualquier instante de tiempo t. En el problema nos piden determinarla en el instante que el radio es $r = 0.3m$, como la razón de cambio está expresada en centímetros cúbicos, el radio también debe estar en centímetros, es decir $r = 30cm$. Al sustituir en la ecuación (2):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{50000}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{50000}{4\pi (30)^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = 4.4209 \frac{cm}{min}$$

El resultado nos indica que el radio crece con una rapidez de $4.4209 \frac{cm}{min}$ en el instante en que el radio es 30 de centímetros.

4.4 Ejercicios

4.4.1 Determinar, intervalos de crecimiento, los valores máximos, mínimos locales intervalos de concavidad, puntos de inflexión y grafica para las funciones:

a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$
b) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 15$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
d) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$
e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 12$
f) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
g) $f(x) = -x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x$
h) $f(x) = -x^5 + 5x^3$

4.4.2 Ejercicios

a) Se desea construir una caja sin tapa, de un pedazo de cartón de 12cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados. Hallar la longitud del lado del cuadrado a cortar, para que el volumen de la caja se máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

b) Un trozo de alambre de 40cm va a doblarse para formar un marco. ¿Qué dimensiones deberá tener para que el área enmarcada sea máxima?

c) Una compañía tiene un ingreso I como función de la producción de x artículos dado por la función $I(x) = -2x^3 + 60x^2 + 1800x$. ¿Cuál es la cantidad de artículos que maximizan el ingreso?

d) Se va a diseñar un cartel rectangular en una hoja de un material especial, de manera que el área impresa en ella será de $300cm^2$, la hora debe llevar márgenes: los márgenes a la izquierda y a la derecha serán de $2cm$ mientras que los márgenes superior e inferior deberán ser de $6cm$. ¿Cuáles son las dimensiones para usar la menor cantidad de material?

e) Se va a construir un recipiente con la forma de cilindro circular sin tapa con un volumen de $16000\pi cm^3$. El precio del material que se usa para el fondo cuesta el doble que el material que da forma al recipiente. ¿Qué dimensiones deberá tener para que el costo sea mínimo

Solución a los Ejercicios

Unidad 1

Sección 1.2.5

Ejercicio 1.2.5.1

a) $Área = 0.999023m^2$
b) $Área = 1m^2$

Ejercicios 1.2.5.2

Ejercicio a

i) $Área = 0.9921875m^2$
ii) $Área = 1m^2$

Ejercicio c

i) $distancia = 5.8125m$
ii) $distancia = 6m$

Ejercicio d

$A_{retirada} = A$, no queda nada.

Ejercicio e

i) $\frac{313}{99}$
ii) $\frac{7}{3}$
iii) $\frac{17}{3}$
iv) $\frac{41}{333}$

Sección 1.4.4

a) 14
b) 9
c) $\frac{1}{5}$
d) 4
e) $-\frac{1}{7}$
f) $\frac{1}{12}$
g) $-\frac{1}{4}$
h) $-\frac{1}{8}$
i) 3
j) 12
k) 23
l) 6
m) $\frac{1}{2}$
n) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$
o) $\frac{1}{2}$
p) $2x$
q) $3x^2$
r) $\frac{2}{3}$
s) 5
t) $\frac{3}{2}$

Unidad 2

Sección 2.6

Ejercicios 2.6.1

a) $f'(2) = 3$
b) $f'(1) = 3$
c) $f'(0) = 2$
d) $f'(2) = -\frac{1}{4}$
e) $f'(3) = -1$
f) $f'(4) = \frac{1}{4}$
g) $f'(3) = \frac{1}{2}$

Ejercicios 2.6.2

i) $4x - y + 4 = 0$
ii) $12x - y + 17 = 0$
iii) $(3a^3 + 2a)x - y - 2a(2a^2 + 2a - 1) = 0$
iv) $x - 2y + 1 = 0$
v) $x + 25y - 8 = 0$

vi) $x - 6y + 17 = 0$

vii) $-x + 4y - 22 = 0$

Ejercicios 2.6.3

a) $v(1) = 0\, ft/s$; $v(2) = -32ft/s$

b) $v(1) = -2\, m/s$; $v(a) = \frac{-2}{a^3} m/s$

c)

i) $\Delta C = \frac{C(301) - C(300)}{301 - 300} = 10.05 \frac{\$}{u}$

ii) $ii\ C'(300) = 10\ \$/u$

d)

i) $0.4\ °C/hr$

ii) $0.6\ °C/hr$

iii) $0.8\ °C/hr$

Unidad 3

Sección 3.2.5

Ejercicios 3.2.5.1

a) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

c) $f'(x) = 32x^7 + 15x^4 + 6x^2$

d) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f'(x) = 20x^4 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^7}} + \frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}$

Ejercicios 3.5.2.2

a) $11x + 12y - 16 = 0$

b) $3x - y - 3 = 0$

c) $y = 4$

d) $22x - 3y - 10 = 0$

e) $11x + 12y - 16 = 0$

f) $204x - y - 418 = 0$

Sección 3.3.3

Ejercicios 3.3.3.1

a) $f'(x) = 8x^3$

b) $f'(x) = 2$

c) $f'(x) = -3$

d) $f'(x) = 2x + 2$

e) $f'(x) = 2x - 4$

f) $f'(x) = -x^2 - 1$

g) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

h) $f'(x) = 6x^5$

i) $f'(x) = 2x + 10$

j) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Sección 3.4.1

Ejercicios 3.4.1.1

a) $f'(x) = 24(3x - 1)^2$

b) $f'(x) = 6x^2(x^3 + 4)$

c) $f'(x) = 3(x^2 - x)^2(2x - 1)$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

e) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(-3x-3)^2}}$

f) $f'(x) = \frac{-8(x-2)}{(x^2-4x+3)^5}$

g) $f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x^2+2x)^2}$

h) $f'(x) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{x+3}}$

i) $f'(x) = -\frac{8}{3\sqrt[3]{4x-1}}$

j) $f'(x) = 3x\sqrt{x^2+2}$

Sección 3.5.3

Ejercicios 3.5.3.1

a) $f'(x) = 3x(5x^3 + 9x - 6)$

b) $f'(x) = 30x^5 - 75x^4 + 20x^3$

c) $f'(x) = (2x+1)^2(10x^2 + 2x)$

d) $f'(x) = (5x-4)^8(3x-2)^5(225x - 162)$

e) $f'(x) = 1 + (x-1)^3(5x-1)$

f) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

g) $f'(x) = \frac{4x^3+1}{x^2}$

h) $f'(x) = \frac{-x^2+1}{\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

i) $f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3}$

j) $f'(x) = \frac{-4(2-2x^2)^3(4x^3-2x^2+2)}{x^3}$

k) $f'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{(2x+3)^3}\ \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$

l) $f'(x) = \frac{(2x-1)(10x^2-2x+6)}{(x^2+1)^2}$

Unidad 4

Sección 4.4

Ejercicios 4.4.1

a)

Puntos críticos $x = 0 \;\; y \;\; x = 1$

Creciente de $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Decreciente de $(0,1)$

Máximo en $x = 0$

Mínimo en $x = 1$

Punto de inflexión $x = \frac{1}{2}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

b)

Puntos críticos $x = 0 \;\; y \;\; x = -\frac{4}{3}$

Creciente de $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty)$

Decreciente de $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

Máximo en $x = -\frac{4}{3}$

Mínimo en $x = 0$

Punto de inflexión $x = -\frac{2}{3}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$

c)

Puntos críticos $x = -1$

Creciente de $(-\infty, \infty)$

No es decreciente

No tiene valores máximos y mínimos locales

Punto de inflexión $x = -1$

Cóncava hacia abajo de $(-\infty, 1)$

Cóncava hacia arriba de $(1, \infty)$

d)

Puntos críticos $x = -3 \ \ y \ \ x = 3$

Creciente de $(-3,3)$

Decreciente de $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Máximo en $x = 3$

Mínimo en $x = -3$

Punto de inflexión $x = 0$

Cóncava hacia abajo de $(0, \infty)$

Cóncava hacia arriba de $(-\infty, 0)$

e)

Puntos críticos $x = -1 \quad x = 0 \quad y \ x = 1$

Creciente de $(-1,0) \cup (1, \infty)$

Decreciente de $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

Máximo en $x = 0$

Mínimo en $x = -1 \ \ y \ \ x = 1$

Puntos de inflexión $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad y \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

f)

Puntos críticos $x = -1 \quad y \quad x = 0$

Creciente de $(-1, \infty)$

Decreciente de $(-\infty, -1)$

No tiene máximos locales

Mínimo en $x = -1$

Puntos de inflexión $x = 0 \quad y \quad x = -\frac{2}{3}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(-\infty, - -\frac{2}{3}\right) \cup (0, \infty)$

g)

Puntos críticos $x = -3 \quad x = -1 \quad y \ x = 1$

Creciente de $(-\infty, -3) \cup (-1,1)$

Decreciente de $(-3, -1) \cup (1, \infty)$

Máximo en $x = -3 \quad y \quad x = 1$

Mínimo en $x = -1$

Puntos de inflexión $x = -\frac{3+2\sqrt{3}}{3} \quad y \quad x = -\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\infty, -\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, -\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$

h)

Puntos críticos $x = -\sqrt{3} \quad x = 0 \quad y \ x = \sqrt{3}$

Creciente de $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

Decreciente de $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$

Máximo en $x = \sqrt{3}$

Mínimo en $x = \sqrt{3}$

Puntos de inflexión $x = 0 \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad y \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Cóncava hacia abajo de $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$

Cóncava hacia arriba de $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Ejercicios 4.4.2

a) El corte es de 2 centímetros
b) Largo de 10cm y Ancho de 10cm
c) $x = 30$ artículos
d) Hoja de $14cmx36cm$
e) Radio de $20cm$ y alto de $40cm$

Referencias Bibliográficas

Filloy, Eugenio, et al. (2003). Matemática Educativa. “El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial”. México: Fondo de Cultura Económica.

Goldstein, L. J. et al. (1990). Cálculo y sus aplicaciones. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana.

Larson, Ron, et al. (2010). Cálculo 1. Novena edición. México: McGraw– Hill. 10.

Leithold, Louis. (1998). El cálculo. Séptima edición. México: Oxford University Press.

Mochón, Simón. (1994). Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Polya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas.

Purcel, Edwin J. et al. (2007). Cálculo. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall.

Stewart, James, et al. (2012). Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. México: cengage Learning.

Stewart, James. (2012). Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. Séptima edición. México: cengage Learning.

Swokowski, Eart W. (1987). Introducción al Cálculo con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dennis G. et al. (2011). Cálculo de una variable. México: McGraw– Hill.