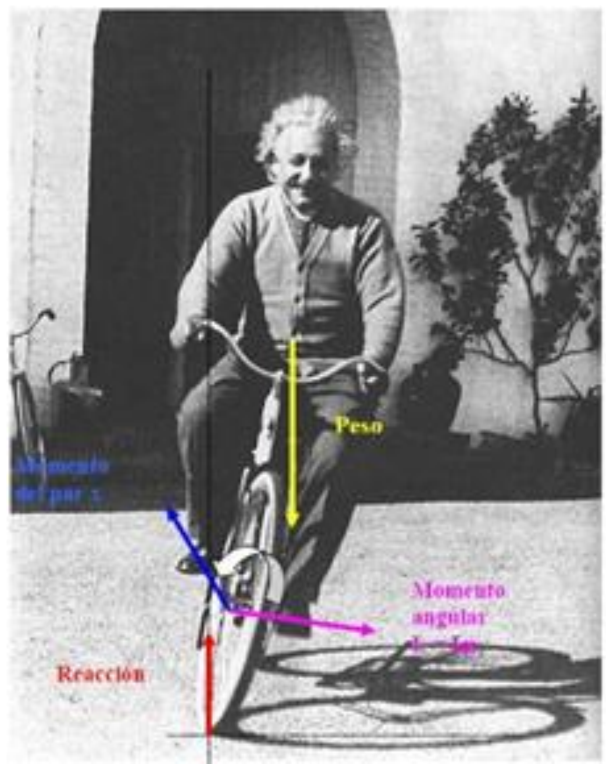
Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Azcapotzalco
Área de Ciencias Experimentales

# Guía para el Examen Extraordinario de

# FÍSICA III




**Colaboradores:**

**Jesús González González**
**José Rafael Cuéllar Lara**
**Juan Carlos Cabrera Moreira**
**Rodrigo Granados Hernández**

**Coordinador:**

**Rodrigo Granados Hernández**

**Marzo 2019**

**Guía de estudio para el examen extraordinario de Física III**

## Presentación

La guía de Física III considera la relación entre contenidos, la teoría básica y los ejercicios que permiten clarificar el curso. Lo que propicia la cobertura eficiente de los aprendizajes y en consecuencia la aprobación del examen extraordinario de la materia.

En el Área de Ciencias Experimentales se tiene como meta proporcionar a los estudiantes los elementos de la cultura básica correspondientes al conocimiento científico y tecnológico, para que cuente con información y metodologías básicas que les permitirán, a su egreso, interactuar con su entorno de una manera más creativa, responsable, informada y crítica. Pretende una enseñanza que permita al estudiante modificar sus estructuras de pensamiento y mejorar sus procesos intelectuales.

## Enfoque de la materia

Los Programas de Estudio son la concreción de la misión de una institución educativa por lo que deben estar presentes en las acciones de toda su comunidad, especialmente en los participantes en el proceso educativo, ello se logra a través de la comprensión y aplicación del Plan y los Programas de Estudio. En el caso de las asignaturas de Física se deben tomar en cuenta, además de la misión del Colegio, las orientaciones del Área de Ciencias Experimentales.

De la Misión del Colegio se resaltan los siguientes elementos:

1. Promover en los alumnos el aprendizaje sistemático de conocimientos de la disciplina.
2. Propiciar que los alumnos apliquen en la práctica los conocimientos y formas de pensar científicos.
3. Dotar a los alumnos de una creciente autonomía intelectual, apoyar el desarrollo de habilidades del pensamiento y de capacidad para realizar aprendizajes independientes: aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser.
4. Desarrollar los valores de responsabilidad social y de capacidad para incidir positivamente en su entorno.

De las orientaciones del Área de Ciencias Experimentales se destacan los siguientes puntos:

- Imprimir a los cursos una orientación enfocada a las habilidades intelectuales y a los conceptos básicos necesarios para abordar las ciencias experimentales y la aplicación de los conceptos y principios de estas disciplinas en su entorno, de manera que obtenga una interpretación científica, sistemática, objetiva y responsable de la naturaleza más amplia que aquélla que posee al ingresar al bachillerato.
- Promover que el estudiante reconozca la relación Hombre–Ciencia–Naturaleza, en particular con la física, de tal manera que dicha relación sea más armónica y responsable, enfatizando la interacción entre ciencia y tecnología, y entre ambiente y sociedad.

**Propósitos Generales**

Los propósitos generales de Física III El alumno será capaz de:

- Describir el comportamiento mecánico de un sistema compuesto por cuerpos rígidos y/o fluidos.
- Emplear la herramienta vectorial como apoyo de los aprendizajes que lo requieran.
- Utilizar la experimentación como elemento esencial en el aprendizaje de la mecánica del cuerpo rígido o de un fluido.
- Emplear modelos matemáticos a partir de resultados experimentales, que expresen relaciones entre las magnitudes que caracterizan movimientos de cuerpos rígidos y de fluidos.
- Resolver situaciones o problemas donde se manifiesten: procesos de transmisión o de conservación de masa, energía traslacional y rotacional, momento lineal y momento angular.
- Desarrollar y presentar proyectos de investigación escolar, ya sean experimentales, de campo, de desarrollo tecnológico o documentales, relativos al curso y que respondan a sus intereses.
- Reconocer la trascendencia y el impacto en la sociedad de la mecánica de cuerpos rígidos y/o fluidos.

**Contenidos temáticos**

En la asignatura de Física III, se abordan los principios de la mecánica traslacional y/o rotacional para describir el movimiento de un sistema compuesto de cuerpos rígidos o de fluidos. Las unidades que la conforman son:

- Sistemas de cuerpos rígidos
- Sistemas de fluidos

## Instrucciones

Esta guía fue realizada con el propósito de adquirir los aprendizajes señalados en el mapa curricular actualizado en 2016 de la materia de Física III por el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), brindando una pauta al estudio de la materia, para detectar los aprendizajes en los que se tienen deficiencias y organizarse para fortalecerlos, poniendo como meta aprender Física III y por consecuencia incrementar la oportunidad de aprobarla, al presentar el examen extraordinario.

- El uso de esta guía es muy sencillo e intuitivo para el autoaprendizaje del alumno, así como para facilitar el acompañamiento por parte de un asesor.
- La guía se presenta de la siguiente manera:
    - Los aprendizajes expeditos del programa operativo de Física III.
    - Un listado de conceptos e ideas clave para desarrollar el tema, con una breve explicación.
    - Ejemplos resueltos del aprendizaje, intentando facilitar la comprensión y seguimiento del aprendizaje a tratar.
    - Ejercicios propuestos (con diferentes grados de complejidad).
    - Como punto final se tiene la Bibliografía utilizada y propuesta para la consulta de los alumnos, y otra para el apoyo de los asesores.
- A través de la guía se usan las unidades en el Sistema Internacional (SI).
- Estudia cada aprendizaje, rescatando los conceptos fundamentales.
- Consulta, discute y analiza con un asesor de Física III, los aprendizajes de la guía.
- Responde las preguntas y problemas que aparecen para cada unidad.
- Al final se presenta un examen muestra.
- Esta el Programa Integral de Asesorías (PIA) donde te pueden apoyar.

## Instrucciones para la solución de los problemas

- Para resolver un problema es importante que comprendas que se te pide, obteniendo la información necesaria.
- Extrae los datos que te da el enunciado, exprésalo en el SI en una lista.
- Elabora un bosquejo, diagrama, dibujo o esquema que ilustre y que te aclare el problema.
- Escribe las posibles ecuaciones que consideres necesarias para resolver el problema.
- Realiza los despejes necesarios en las ecuaciones planteadas.
- Sustituye los valores con las unidades correspondientes en las ecuaciones. Nota: si hay una constante en la ecuación, normalmente en esas unidades tienen que estar los datos.
- Realiza las operaciones y verifica que las unidades obtenidas sean consistentes con la magnitud calculada.
- Analiza si tus resultados son consistentes con la realidad del problema.
- Presenta los resultados con unidades y conclusiones de una manera clara.

**Índice**

## Unidad 1. Sistemas de cuerpos rígidos

### Presentación

En esta unidad se estudian los fundamentos de la mecánica rotacional de cuerpos rígidos, mediante el empleo de los conceptos como: el centro de masa, fuerza, momento de torsión, energía de traslación y de rotación, cantidad de movimiento lineal y angular; haciendo énfasis en su carácter vectorial.
El estudio propedéutico y análisis de los conceptos, leyes de la dinámica y de conservación de la energía, ayudan a explicar el funcionamiento de dispositivos mecánicos como giróscopos, máquinas y herramientas en la industria, en la salud y en los deportes; así como los movimientos planetarios o de otros cuerpos celestes.

### Propósitos:

Al finalizar la unidad el alumno:

- Describirá el movimiento de un cuerpo rígido.
- Comprenderá el comportamiento mecánico de los cuerpos rígidos con base en las leyes de la dinámica y los principios de conservación.
- Resolverá situaciones y problemas referentes al movimiento de cuerpos rígidos mediante el empleo de las leyes de la mecánica y la aplicación de la herramienta vectorial necesaria, que le ayuden a comprender el funcionamiento de dispositivos mecánicos de uso común.

## Movimiento circular uniforme

Se dice que un objeto que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante v experimenta un movimiento circular uniforme. En este caso, la magnitud de la velocidad permanece constante; pero la dirección de la velocidad cambia continuamente conforme el objeto se mueve alrededor del círculo.

A menudo al movimiento circular se le describe en términos de la frecuencia $f$, es decir, el número de revoluciones por segundo. El periodo $T$ de un objeto que se mueve en una trayectoria circular es el tiempo requerido para completar una revolución. El periodo y la frecuencia están relacionados por

$$T = \frac{1}{f}$$

Para un objeto que da vueltas en un círculo (de circunferencia $2\pi R$) con rapidez constante $v$, podemos escribir

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$v = 2\pi f R$$

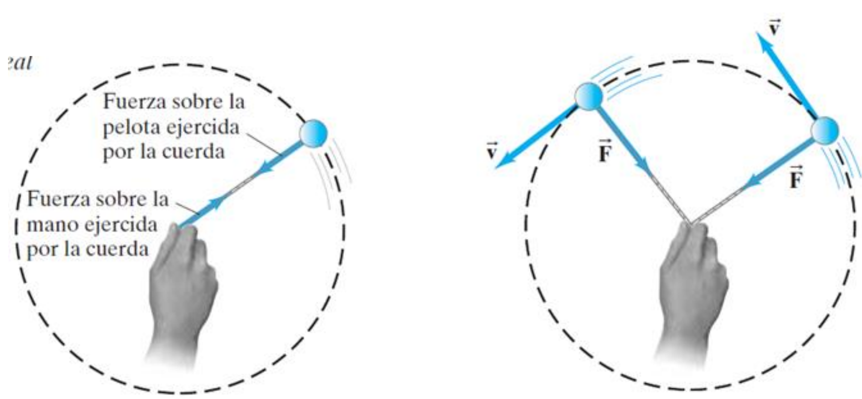
un objeto que se mueve en un círculo de radio $R$ con rapidez constante $v$ tiene una aceleración que está dirigida hacia el centro del círculo y cuya magnitud es

$$ac = \frac{v^2}{R}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, si un objeto está acelerado debe haber una fuerza neta no nula actuando sobre él. Un objeto que se mueve en un círculo, como una pelota atada al extremo de una cuerda, debe tener una fuerza aplicada sobre el objeto para seguir moviéndose en ese círculo. Es decir, es necesaria una fuerza neta para darle una aceleración centrípeta. La magnitud de la fuerza neta requerida puede calcularse usando la segunda ley de Newton para la componente radial, $\Sigma F_C = ma_C$, donde $a_C$ es la aceleración centrípeta, $a_C = v^2/R$ y $\Sigma F_C$ es la fuerza total (o fuerza neta) en la dirección radial:

$$\Sigma F_C = ma_C$$

$$\Sigma Fc = m\,\frac{v^2}{R}$$




*Movimiento circular de una pelota en el extremo de una cuerda.*

**Ejemplo**

Una pelota de 4 kg se hace girar en un círculo horizontal por medio de una cuerda de 2 m de longitud. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si el periodo es de 0.5 s?

$m$ = 4 kg, $R$ = 2 m, T = 0.2 s, $F_C$ = Tensión en la cuerda = ¿?

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(2\text{ m})}{0.5\text{ s}} = 25.1\text{ m/s}$$

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{(4\text{ kg})(25.1\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}$$
$$F_c = 1\,260\text{ N}$$

**Ejercicios. Movimiento circular uniforme**

1. Una pelota está unida al extremo de una cuerda de 1.5 m y gira en círculos con rapidez constante de 8 m/s. ¿Cuál es la aceleración centrípeta? Resp. 42.7 m/s$^2$
2. Una polea motriz de 6 cm de diámetro se hace girar a 9 rev/s. ¿Cuál es la aceleración centrípeta en un punto localizado en el borde de la polea? ¿Cuál sería la rapidez lineal de una banda accionada por la polea? Resp. 95.9 m/s$^2$, 1.70 m/s
3. Un objeto gira describiendo un círculo de 3 m de diámetro con una frecuencia de 6 rev/s. ¿Cuál es el periodo de revolución, la rapidez lineal y la aceleración centrípeta? Resp. T = 0.167 s, $v$ = 56.5 m/s, $a_c$ = 21.30 m/s$^2$
4. Un automóvil de 1 500 kg recorre una pista circular con una rapidez constante de 22 m/s. Si la aceleración centrípeta es de 6 m/s$^2$, ¿cuál es el radio de la pista? Resp. $R$ = 80.7 m, $F_c$ = 9000 N
5. Una piedra de 3 kg, atada a una cuerda de 2 m, oscila describiendo un círculo horizontal, de manera que completa una revolución en 0.3 s. ¿Cuál es la fuerza centrípeta sobre la piedra? Resp. 2630 N
6. Un objeto de 5 kg oscila describiendo un círculo horizontal con una rapidez de 30 m/s. ¿Cuál es el radio de su trayectoria si la fuerza centrípeta es de 2000 N? Resp. $R$ = 1.13 ft
7. Un corredor de 70 kg recorre una pista de 25 m de radio con una rapidez de 8.8 m/s. ¿Cuál es la fuerza central que hace al corredor describir la curva? Resp. 217 N

**Cuestionario. Movimiento circular uniforme**

1. ¿Qué es el movimiento circular uniforme?
2. Menciona 3 ejemplos cotidianos donde se presente el movimiento circular uniforme
3. ¿Qué es el periodo y la frecuencia del movimiento circular uniforme?
4. ¿Qué es la aceleración centrípeta y la fuerza centrípeta?
5. ¿Qué fuerza mantiene la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra?

**El péndulo cónico**

Un péndulo cónico consta de una masa $m$ que gira en un círculo horizontal con una rapidez constante $v$ al extremo de una cuerda de longitud $L$. La fuerza centrípeta proporciona la componente horizontal de la tensión en la cuerda. La componente vertical es igual al peso de la masa que gira; por tanto,

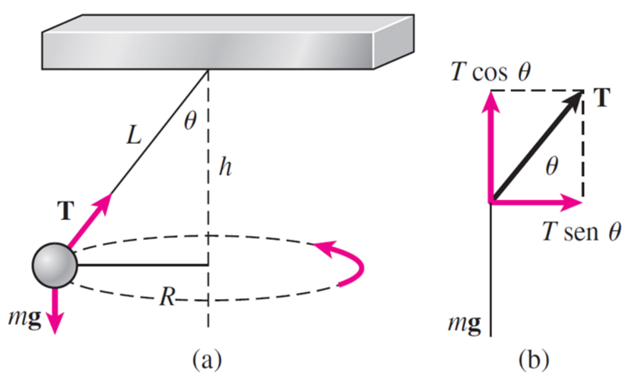
$$T \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad T\cos\theta = mg$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Al incrementarse la rapidez lineal, el ángulo que forma la cuerda con la vertical también aumenta. Por ende, se eleva la posición vertical de la masa, originando una reducción en la distancia $h$ por debajo del punto de apoyo. Si deseamos expresar la ecuación anterior en términos de la posición vertical $h$, debemos observar que

$$\tan\theta = \frac{R}{h}$$




de donde obtenemos

$$\frac{R}{h} = \frac{v^2}{gR}$$

Por tanto, la distancia del peso por debajo del soporte es una función de la rapidez lineal y está dada por

$$h = \frac{gR^2}{v^2}$$

Una forma más útil para esta ecuación se obtiene expresando la rapidez lineal en términos de la frecuencia rotacional. Como $v = 2\pi f R$, podemos escribir

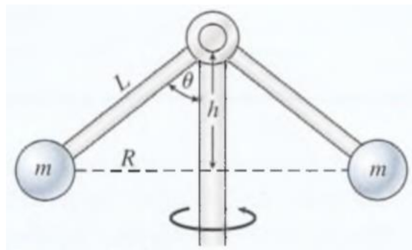
$$h = \frac{gR^2}{4\pi^2 f^2 R^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2}$$

Si se resuelve para $f$ se obtiene

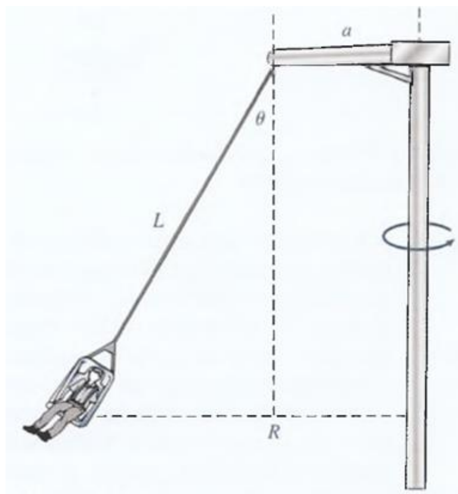
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

**Ejercicios. El péndulo cónico**

1. Un péndulo cónico oscila describiendo un círculo horizontal de 30 cm de radio. ¿Qué ángulo forma el cordón del péndulo respecto a la vertical cuando la rapidez lineal de la masa es de 12 m/s? Resp. $\theta$ = 88.8º
2. ¿Cuál es la rapidez lineal de los contrapesos ilustrados en la figura si $L$ = 20cm y $\theta$ = 60°? ¿Cuál es la frecuencia de revolución? Resp. 1.71 m/s, 1.58 rev/s




3. Considere las “sillas voladoras” de la figura. La longitud L = 10 m y la distancia a = 3 m. ¿Cuál tendrá que ser la velocidad tangencial de la silla para que la cuerda forme un ángulo de 30° con la vertical? Resp. 6.73 m/s




4. ¿Cuál será la frecuencia de revolución del columpio de la figura anterior si el ángulo $\theta$ es igual a 25°? Resp. $f$ = 0.131 rev/s

**Cuestionario. El Péndulo cónico**

1. ¿Qué es el péndulo cónico?
2. ¿Qué fuerzas se presentan en el péndulo cónico?
3. Menciona un ejemplo donde se presente el péndulo cónico.
4. ¿Cómo varía la altura del péndulo cónico si aumenta la rapidez lineal?

**Gravitación Universal**

Isaac Newton examinó el movimiento de los cuerpos celestes: los planetas y la Luna. En particular, se preguntó acerca de la naturaleza de la fuerza que debe actuar para mantener a la Luna en su órbita casi circular alrededor de la Tierra.
Newton también reflexionó acerca del problema de la gravedad. Puesto que los cuerpos que caen aceleran, Newton concluyó que debía ejercerse una fuerza sobre ellos, a la cual llamamos fuerza de gravedad. Siempre que una fuerza se ejerce sobre algo, esa fuerza es ejercida por algún otro objeto. Pero ¿qué objeto ejerce la fuerza de gravedad? Todo objeto sobre la superficie terrestre siente la fuerza de gravedad e, independientemente de dónde se encuentre el objeto, la fuerza está dirigida hacia el centro de la Tierra. Newton concluyó que debe ser la Tierra misma la que ejerce la fuerza gravitacional sobre los objetos que están en su superficie.
Newton se propuso determinar la magnitud de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna en comparación con la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre objetos en la superficie terrestre, donde la fuerza de la gravedad acelera los objetos a 9.80 m/s$^2$. La aceleración centrípeta de la Luna se calcula con $a_C = v^2/r$ y resulta $a_C$ = 0.00272 m/s$^2$. En términos de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g, esto equivale a

$$a_R = \frac{0.00272\ \mathrm{m/s^2}}{9.80\ \mathrm{m/s^2}}\, g \approx \frac{1}{3600}\, g$$

Es decir, la aceleración de la Luna hacia la Tierra es aproximadamente de la aceleración de los objetos en la superficie terrestre. La Luna está a 384,000 km de la Tierra, lo cual es casi 60 veces el radio de la Tierra o 6380 km. Entonces, la Luna está 60 veces más alejada del centro de la Tierra que los objetos en la superficie terrestre. Pero 60 x 60 = 3600. Newton concluyó que la fuerza gravitacional $F$ ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto decrece con el cuadrado de su distancia r desde el centro de la Tierra:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

La Luna está a una distancia de 60 radios terrestres, por lo que siente una fuerza gravitacional de sólo de la fuerza gravitacional que sentiría si fuera sólo un punto sobre la superficie de la Tierra.
Newton se dio cuenta de que la fuerza de gravedad sobre un objeto depende no sólo de la distancia, sino también de la masa del objeto. De hecho, es directamente proporcional a su masa. De acuerdo con la tercera ley de Newton, cuando la Tierra ejerce su fuerza gravitacional sobre cualquier cuerpo, por ejemplo, sobre la
Luna, ese objeto ejerce una fuerza de la misma magnitud, pero de sentido opuesto sobre la Tierra. Debido a tal simetría, Newton razonó que la magnitud de la fuerza de la gravedad debe ser proporcional a ambas masas. Así,

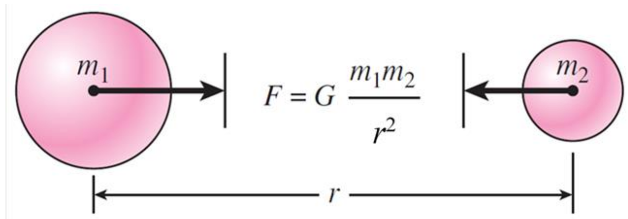
$$F \propto \frac{m_E m_B}{r^2}$$

donde $m_E$ es la masa de la Tierra, $m_B$ es la masa del otro objeto y $r$ es la distancia del centro de la Tierra al centro del otro objeto.

Newton propuso su ley de la gravitación universal, que puede enunciarse como sigue:

***Toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadro de la distancia entre ellas. Esta fuerza actúa a lo largo de la línea que une a las dos partículas.***

La magnitud de la fuerza gravitacional puede escribirse como




donde $m_1$ y $m_2$ son las masas de las dos partículas, $r$ es la distancia entre ellas, y $G$ es una constante universal que debe medirse experimentalmente y tiene el mismo valor numérico para todos los objetos.

$$G = 6.67 \text{ x } 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2.$$

**Ejemplo**
Dos pelotas, una de 4 kg y otra de 2 kg, están colocadas de modo que sus centros quedan separados una distancia de 40 cm. ¿Cuál es la fuerza con la que se atraen mutuamente?

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(4\ \text{kg})(2\ \text{kg})}{(0.40\ \text{m})^2}$$
$$F = 3.34 \times 10^{-9}\ \text{N}$$

**Ejercicios. Gravitación Universal**

1. Una masa de 4 kg se encuentra a una distancia de 8 cm de una masa de 2 kg. Calcule la fuerza de atracción gravitacional entre las dos masas. Resp. 8.34 X $10^{-8}$ N
2. Una masa de 3 kg está colocada a 10 cm de una masa de 6 kg. ¿Cuál es la fuerza gravitacional resultante sobre una masa de 2 kg colocada en el punto medio de una recta que une las dos primeras masas? Resp. $F_R$ = 1.60 x $10^{7}$ N
3. La aceleración debida a la gravedad en un planeta distante es de 5.00 m/s$^2$ y el radio del planeta es de 4560 km aproximadamente. Use la ley de la gravitación para estimar la masa de ese planeta. Resp. 1.56 x $10^{24}$ kg.
4. Dos masas, una de 60 kg y otra de 20 kg, están a una distancia de 10 m. ¿En qué punto de la recta que une a estas dos cargas se puede colocar otra masa de manera que la fuerza resultante sobre ella sea cero? Resp. a 6.34 m de la masa de 60 kg

**Cuestionario. Gravitación Universal**

1. ¿Qué hace que un objeto al ser soltado caiga a tierra?
2. ¿Qué dice la Ley de la Gravitación Universal?
3. ¿Hacia dónde se dirige la fuerza gravitacional?
4. ¿Existe una fuerza gravitacional en cualquier planeta o satélite? Explica

**El campo gravitacional y el peso**

El peso se define como la atracción que ejerce la Tierra sobre las masas ubicadas cerca de su superficie. La atracción que cualquier masa esférica grande (como la de la Tierra) ejerce sobre otra masa localizada por fuera de la esfera puede calcularse suponiendo que la masa total de la esfera grande se concentra en su centro. Suponga, que una masa $m$ se halla en la superficie de la Tierra, cuya masa es $m_e$. Al igualar el peso $mg$ con la fuerza gravitacional se obtiene

$$mg = \frac{Gmm_e}{R_e^2}$$

El radio de la Tierra se representa con el símbolo $R_e$. Ahora, tras cancelar la masa $m$, queda el valor siguiente para la aceleración debida a la gravedad

$$g = \frac{Gm_e}{R_e^2}$$

**Ejemplo**
¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra se reducirá el peso de una persona hasta la mitad del valor que tiene estando en la superficie?

El peso $mg$ en la superficie se reducirá a la mitad cuando la aceleración debida a la gravedad $g$ se vuelva ½(9.8 m/s$^2$) = 4.9 m/s$^2$. Para la distancia general $r = Re + h$, donde $h$ es la altura sobre la superficie terrestre

$$g = \frac{Gm_e}{r^2} = 4.9 \text{ m/s}^2 \qquad r = R_e + h$$

Al despejar $r$ podemos restar el radio de la Tierra para determinar la altura, $h$.

$$r^2 = \frac{Gm_e}{4.9 \text{ m/s}^2} \qquad \text{o} \qquad r = \sqrt{\frac{Gm_e}{4.9 \text{ m/s}^2}}$$

$m_e = 5.98 \times 10^{24}$ *kg*,

$$r = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{4.9 \text{ m/s}^2}} = 9.02 \times 10^6 \text{ m}$$

Restamos $R_e = 6.38 \times 10^6$ m para determinar la altura $h$ sobre la superficie de la Tierra

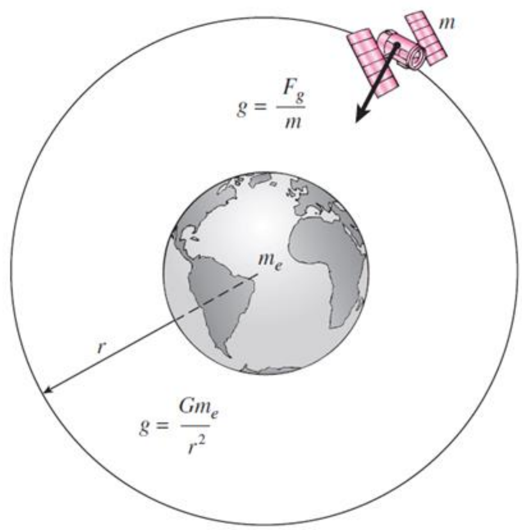
$$h = 9.02 \times 10^6 \text{ m} = 6.38 \times 10^6 \text{ m} = 2.64 \times 10^6 \text{ m}$$

En un punto a una distancia de 2 640 km sobre la Tierra el peso de un objeto será la mitad de lo que vale en la superficie de nuestro planeta.
Si conocemos la aceleración debida a la gravedad en cualquier sitio de la superficie terrestre podemos determinar la fuerza gravitacional (peso) que actúa sobre un objeto. La dirección de esta fuerza será hacia el centro de la Tierra. Resulta conveniente definir el campo gravitacional como la fuerza por unidad de masa en un lugar determinado.

La magnitud de este campo es simplemente la aceleración debida a la gravedad:

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{Gm_e}{r^2}$$

donde $r$ es la distancia del centro de la Tierra al punto donde se va a determinar la gravedad.
Debe observarse que el campo gravitacional es una propiedad del espacio y existe hasta cierto punto por arriba de la Tierra, haya o no masa situada en ese punto. Al conocer el campo gravitacional o la aceleración debida a la gravedad en ese punto, inmediatamente podemos determinar el peso de cierta masa colocada en ese lugar.




*El campo gravitacional sobre la Tierra puede representarse por medio de la aceleración g que podría experimentar una pequeña masa m si estuviera colocada en ese punto. La magnitud del campo se determina a partir de la masa me de la Tierra y de la distancia R de dicha masa al centro de nuestro planeta.*

**Ejercicios. El campo gravitacional y el peso**

1. Usa los valores de masa y el radio del planeta enano Plutón para calcular la aceleración debida a la gravedad en su superficie.
2. ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre la aceleración debida a la gravedad es de 0.980 m/s$^2$, si en la superficie tiene una magnitud de 9.80 m/s$^2$?
3. Titania, la luna más grande de Urano, tiene del radio terrestre y de la masa de la Tierra. a) Calcule la aceleración debida a la gravedad en su superficie
4. Rea, una de las lunas de Saturno, tiene un radio de 765 km y una aceleración debida a la gravedad de 0.278 m/s$^2$ en su superficie. Calcule su masa y densidad media.

**Cuestionario. El campo gravitacional y el peso**

1. ¿Qué es el peso?
2. ¿El peso de un objeto es el mismo a cualquier altura sobre la superficie de la Tierra? Explica
3. ¿Qué es el campo gravitacional?
4. ¿Cuál es la magnitud del campo gravitacional en la Tierra?

**Satélites en órbitas circulares**

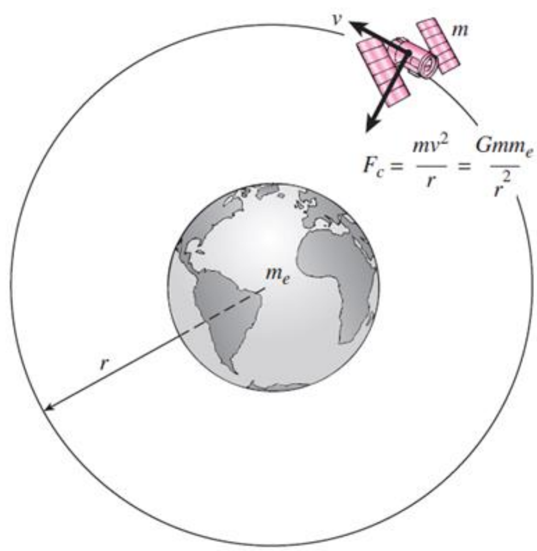
Considere un satélite de masa $m$ que se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $r$. La fuerza centrípeta $mv^2/r$ se determina a partir de la ley de la gravitación de Newton:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_e}{r^2}$$

Simplificando y resolviendo para la velocidad $v$ queda

$$v = \sqrt{\frac{Gm_e}{r}}$$

Observe que sólo hay una rapidez $v$ que un satélite puede tener para permanecer en una órbita de radio fijo $r$. Si cambia la rapidez, lo hace también el radio de la órbita.




*La fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular se origina por la fuerza gravitacional de atracción. Por tanto, un satélite sólo puede tener una rapidez v que le permita permanecer en una órbita de radio fijo.*

**Ejemplo**
Un astronauta con una masa de 100 kg viaja en una estación espacial que se mueve en una órbita circular 900 km sobre la superficie terrestre, (a) ¿Cuál es la rapidez de la estación espacial? (b) ¿Cuál es el peso del astronauta? Primero debe determinarse el radio r de la órbita, que es igual a la suma de la altura $h$ y el radio de la Tierra ($R_e$). Luego es necesario hallar la rapidez y el peso del astronauta a partir de la ley de la gravitación de Newton. La masa de la Tierra es de 5.98 X $10^{24}$ kg.

Solución (a): Puesto que $R_e = 6.38 \text{ X } 10^6$ m y que $h = 900$ km, $r$ se calcula como sigue

$$r = R + h = 6.38 \text{ X } 10^6 \text{ m} + 0.900 \text{ X } 10^6 \text{ m; r} = 7.28 \text{ X } 10^6 \text{ m}$$

Ahora se encuentra la rapidez

$$v = \sqrt{\frac{Gm_e}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{7.28 \times 10^6\ \text{m}}}$$
$$= 7\,400\ \text{m/s}\ (16\,600\ \text{mi/h})$$

Solución (b): El peso del astronauta de 100 kg en órbita se calcula a partir de la ley de gravitación de Newton

$$W = \frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(100\ \text{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{7.28 \times 10^6\ \text{m}}$$
$$= 753\ \text{N}$$

Para gran número de satélites, el periodo T, o sea el tiempo que le lleva al satélite dar una revolución completa en su órbita, es muy importante. Por ejemplo, los satélites de comunicación deben rodear la Tierra en un periodo igual al que emplea el planeta en dar un giro; en otras palabras, necesitan un día.
Se dice que tales órbitas son geosincrónicas y los satélites se llaman satélites sincrónicos. Esos satélites permanecen en un punto accesible en una latitud necesariamente constante, lo que permite que con facilidad haya comunicación directa entre dos puntos de la Tierra. Son necesarios tres satélites de éstos para permitir la comunicación por línea directa entre todos los puntos de la Tierra.
Si suponemos una órbita circular, la velocidad del satélite es:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Igualando esta expresión a $v$, tenemos

$$\sqrt{\frac{Gm_e}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Al resolver para $T$ se obtiene la ecuación siguiente:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_e}\right) r^3$$

El cuadrado del periodo de una revolución es proporcional al cubo del radio de la órbita.

**Ejemplo**
¿Cuál debe ser la altitud de todos los satélites sincrónicos que están colocados en órbita alrededor de la Tierra?

El periodo de uno de tales satélites es igual a un día, o 8.64 x $10^4$ s. Con este dato, determinamos la distancia r desde el centro de la Tierra. Luego restaremos el radio del planeta para obtener la altura $h$ sobre la superficie terrestre.

La distancia *r* que va del centro de la Tierra al satélite se calcula con

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_e}\right)r^3 \qquad \text{o} \qquad r^3 = \left(\frac{Gm_eT^2}{4\pi^2}\right)$$

$$r^3 = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})(8.64 \times 10^4\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}$$

$$= 7.54 \times 10^{22}\ \mathrm{m^3}$$

después de obtener la raíz cúbica de ambos miembros se obtiene

$$r = 4.23 \text{ x } 10^7 \text{ m}$$

Por último, después de restar el radio de la Tierra encontramos que

$$h = 42.3 \text{ x } 10^6 \text{ m - } 6.38 \text{ x } 10^6 \text{ m} = 35.8 \text{ x } 10^6 \text{ m}$$

La órbita geocéntrica debe tener 35 800 km o más de 22 000 millas sobre la superficie terrestre.

**Ejercicios. Satélites en órbitas circulares**

1. ¿Qué rapidez debe tener un satélite para que describa una órbita circular de 800 km sobre la superficie de la Tierra? Resp. $v$ = 7450 m/s
2. La masa de Júpiter es de 1.90 X $10^{27}$ kg y su radio mide 7.15 X $10^7$ m. ¿Qué rapidez debe alcanzar una nave espacial para volar en círculos a una altura de 6.00 X $10^7$ m sobre la superficie de Júpiter? Resp. 31 000 m/s
3. ¿Cuál es la rapidez orbital de un satélite cuya órbita se encuentra 1200 km sobre la superficie de la Tierra? Resp. v = 7254 m/s

**Cuestionario. Satélites en órbitas circulares**

1. ¿Qué es un satélite?
2. ¿Qué es una órbita geosincrónica?
3. ¿Para un satélite en órbita a qué equivale la fuerza gravitacional?
4. ¿Cómo varía el radio de órbita de un satélite al variar su velocidad lineal?

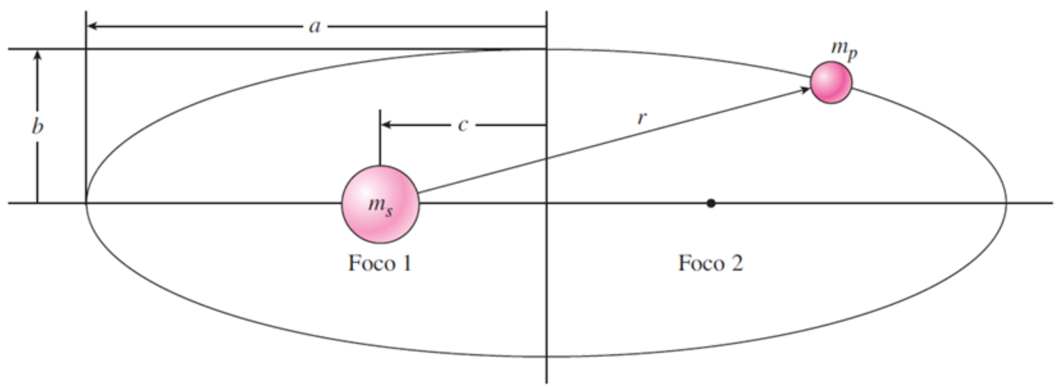
**Leyes de Kepler**

Durante miles de años se ha estudiado el movimiento de los planetas y las estrellas. Desde el siglo II d. C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo postuló la teoría de que la Tierra era el centro del universo. Muchos siglos después, Nicolás Copérnico (1473-1543) fue capaz de demostrar que la Tierra y otros planetas en realidad se movían en órbitas circulares alrededor del Sol.
El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) realizó gran número de mediciones sobre el movimiento de los planetas durante un periodo de 20 años, proporcionando medidas de notable precisión sobre el movimiento de los planetas y de más de 700 estrellas visibles al ojo humano. Puesto que el telescopio todavía no se inventaba, Brahe hizo sus mediciones utilizando un gran sextante y un compás. A partir de estas primeras observaciones el modelo del sistema solar ha evolucionado hasta llegar al que se acepta actualmente.

El astrónomo alemán Johannes Kepler, discípulo de Brahe, retomó los innumerables datos recopilados por su mentor y trabajó con ellos muchos años intentando desarrollar un modelo matemático que concordara con los datos observados. Al principiar esta investigación parecía obvio a Kepler que las órbitas de los planetas pudieran no ser circulares. Sus estudios demostraron que la órbita del planeta Marte era en realidad una elipse, con el Sol en uno de sus focos. Esta conclusión posteriormente se generalizó para todos los planetas que giran alrededor del Sol, y Kepler fue capaz de establecer varios enunciados matemáticos relacionados con el sistema solar. Hoy en día dichos enunciados se conocen como las leyes de Kepler del movimiento planetario.

**Primera ley de Kepler:** *Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Esta ley se llama ley de órbitas.*

En la figura se presenta un planeta de masa $m_p$ que se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, cuya masa es $m_s$. El eje semimayor es $a$ y el eje semimenor es $b$. El valor más pequeño de la distancia $r$ del planeta al Sol se llama perihelio y el valor más grande se llama afelio. La distancia $c$ del Sol al centro de la elipse debe obedecer la ecuación: $a^2 = b^2 + c^2$.
La razón $c/a$ se define como la excentricidad de la órbita. Salvo Marte, Mercurio y Plutón, la mayoría de las órbitas planetarias son casi circulares y tienen una excentricidad que es aproximadamente igual a 1, ya que $c$ es casi igual a $a$.




*La primera ley de Kepler establece que todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos. El eje semimayor a y el eje semimenor b se indican en esta figura.*

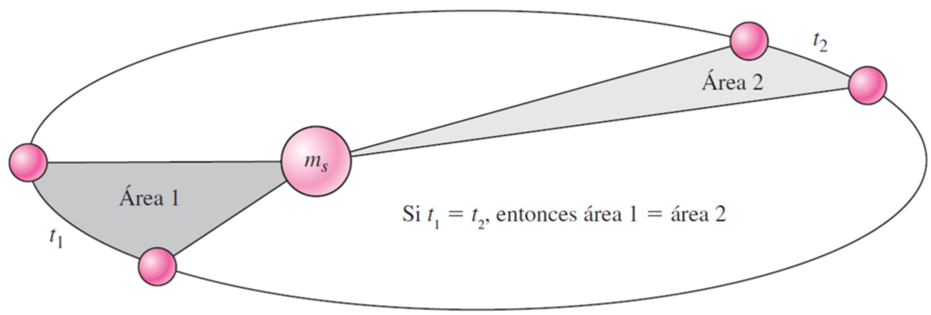
**Segunda ley de Kepler**: *Una línea que conecte un planeta con el Sol abarca áreas iguales en tiempos iguales. A esta ley se le llama también ley de áreas.*

La segunda ley significa que el planeta debe moverse más lentamente cuando está más alejado del Sol, y más rápidamente cuando está más cercano a él.
Newton pudo demostrar posteriormente que esta observación, igual que las otras dos leyes, eran consecuencia de su ley de la gravitación universal.

**Tercera ley de Kepler**: El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. Esta ley se conoce como la ley de los periodos.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G m_s}$$

La tercera ley de Kepler se representa claramente por medio de la ecuación siguiente, la cual se obtuvo para un satélite en una órbita circular. También es cierta para elipses si reemplazamos $R$ (la distancia media del planeta al Sol) con $a$, el eje semimayor de la elipse.




**Ejercicios. Leyes de Kepler**

1. Un satélite se halla a una distancia de 900 km sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del movimiento del satélite? Resp. T = 6180 s
2. ¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra debe estar un satélite para que complete una vuelta alrededor de nuestro planeta en un lapso de 28 h? Resp. $4.04 \text{ X } 10^7$ m

**Cuestionario. Leyes de Kepler**

1. ¿Qué es el perihelio y el afelio?
2. ¿Cómo es el movimiento de un planeta según la segunda ley de Kepler?
3. ¿De qué depende el periodo de un planeta?

**El centro de masa**

Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento, por ejemplo, al lanzar un lápiz al aire, todas sus partículas se mueven a la vez, aunque con distintas trayectorias. Para ***caracterizar la traslación*** del lápiz en su conjunto, sin embargo, nos basta con estudiar qué ocurre en un solo punto del mismo: su **centro de masa**. Este será el que determine su velocidad, su trayectoria, etc.


*El movimiento del centro de masa (punto en el destornillador) es representativo del movimiento de todo el cuerpo. En este caso, su trayectoria describe una parábola.*

*El* ***centro de masa*** *representa el punto en el que suponemos que se concentra toda la masa del sistema para su estudio. Es el centro de simetría de distribución de un sistema de partículas.*

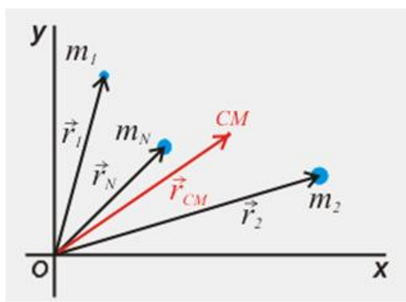
En dinámica podemos usar el modelo del sólido rígido, frente al de partícula puntual, cuando las dimensiones del cuerpo que estamos estudiando no son despreciables frente a la trayectoria que describe.

**Posición del centro de masa**

Si conocemos la posición de cada partícula del sólido, podemos determinar la de su centro de masa.

El vector de posición $\vec{r}_{\text{cm}}$ del centro de masa se puede expresar en términos de los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2,$ . . . de las partículas como

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$




Supongamos que tenemos varias partículas con masas $m_1$, $m_2$, etcétera. Las coordenadas de $m_1$ son $(x_1, y_1)$, las de $m_2$, $(x_2, y_2)$, y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}})$ dadas por

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

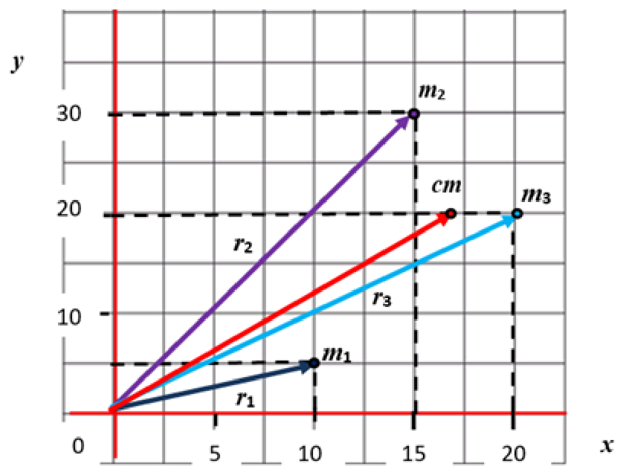
$$y_{\text{cm}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

**Ejemplo**
¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas para el vector de posición de un sistema de tres partículas de 2 kg, 3 kg y 4 kg cuyas coordenadas son (10cm, 5cm); (15cm, 30cm) y (20cm, 20cm) respectivamente?

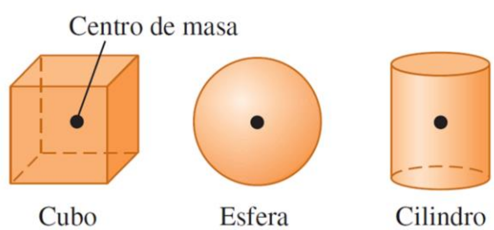
$m_1 = 2\text{kg}$
$x_1 = 10\text{cm}$
$y_1 = 5\text{cm}$
$m_2 = 3\text{kg}$
$x_2 = 15\text{cm}$
$y_2 = 30\text{cm}$
$m_3 = 4\text{kg}$
$x_3 = 20\text{cm}$
$y_3 = 20\text{cm}$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad x_{cm} = \frac{(2\text{kg})(10\text{cm}) + (3\text{kg})(15\text{cm}) + (4\text{kg})(20\text{cm})}{2\text{kg} + 3\text{kg} + 4\text{kg}} = \mathbf{16.11\ cm}$$

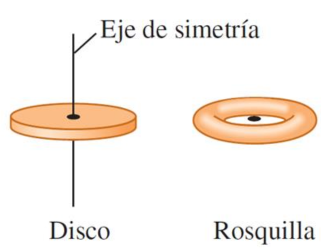
$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad y_{cm} = \frac{(2\text{kg})(5\text{cm}) + (3\text{kg})(30\text{cm}) + (4\text{kg})(20\text{cm})}{2\text{kg} + 3\text{kg} + 4\text{kg}} = \mathbf{20\ cm}$$




Si un objeto homogéneo tiene un centro geométrico, es ahí donde se localiza el centro de masa.




Si un objeto tiene un eje de simetría, el centro de masa estará a lo largo de éste. El centro de masa no siempre está dentro del objeto, como en el caso de una rosquilla.




**Diferencia con el centro de gravedad**

El centro de gravedad de un cuerpo es otro punto que se suele utilizar para estudiar el comportamiento de un sistema de partículas. En concreto, es el punto al que aplicamos el vector peso del sistema, que es la resultante

del vector peso de cada una de las partículas. Para que exista centro de gravedad, debe existir un campo gravitatorio. Sino, sólo existe centro de masas.
En general, el centro de gravedad no coincide con el centro de masas porque el campo gravitatorio no es uniforme. Sin embargo, en la mayoría de los problemas que te encontrarás, puedes suponer el campo gravitatorio constante y por tanto los dos puntos coincidirán.

**Ejercicios. El Centro de masa**

1. Cinco piezas tienen las siguientes masas y coordenadas de sus centros de masa (1) 2 kg, (2 m, 3 m); (2) 3 kg, (1 m, -4 m); (3) 4 kg, (-3 m, 6 m); (4) 1 kg, (-1 m, -3 m); (5) 5 kg, (3 m, -2m). ¿Qué coordenadas tiene el centro de masas del sistema?
2. ¿Cuál es la posición del centro de masas del sistema Tierra-Luna? ($m_T$ = 5.97x$10^{24}$ kg, $m_L$ = 7.35x$10^{22}$ kg, distancia media = 384 400 km)

**Cuestionario. El centro de masa**

1. ¿Qué es el centro de masa?
2. ¿Es lo mismo centro de masa, centro de gravedad y centroide? Explica.
3. ¿Para qué es útil conocer el centro de masa?
4. Menciona un ejemplo cotidiano donde se identifique el centro de masa.

**Equilibrio traslacional.**

Las fuerzas pueden actuar de tal forma que causen el movimiento o que lo eviten. Los grandes puentes deben diseñarse de modo que el esfuerzo global de las fuerzas evite el movimiento.
Las armaduras, vigas, trabes y cables de que están formados deben estar en equilibrio. Dicho de otro modo, las fuerzas resultantes que actúan en cualquier punto de la estructura deben estar equilibradas. Las plataformas, montacargas, ganchos, cables elevadores e incluso los grandes edificios han de construirse de manera que se conozcan y se controlen y comparen los efectos de las fuerzas.

**Primera ley de Newton**
Por experiencia sabemos que un objeto estacionario permanece en reposo a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Una lata permanece en la mesa hasta que alguien la derriba. Un objeto suspendido estará colgando hasta que se suelte. Sabemos que son necesarias las fuerzas para hacer que algo se mueva si originalmente estaba en reposo.
Resulta menos obvio que un objeto en movimiento continuará en ese estado hasta que una fuerza exterior cambie el movimiento. Por ejemplo, una barra de acero que se desliza por el piso de la tienda pronto quedará en reposo debido a su interacción con el piso. La misma barra se deslizaría una distancia mucho mayor, antes de detenerse, si estuviera sobre hielo, lo cual se debe a que la interacción horizontal, llamada fricción, entre el piso y la barra es mucho mayor que la fricción entre el hielo y la barra. Esto nos sugiere la idea de que una barra que se deslizara sobre una superficie horizontal, totalmente carente de fricción, permanecería moviéndose para siempre. Tales ideas forman una parte de la primera ley de Newton del movimiento.

***Primera ley de Newton****. Un cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él.*

Newton llamó inercia a la propiedad de una partícula que le permite mantenerse en un constante estado de movimiento o de reposo. Su primera ley a veces se conoce como ley de inercia. Toda la materia posee inercia.

**Equilibrio**

La ***fuerza resultante*** es una sola fuerza cuyo efecto es igual al de un sistema de fuerzas en particular. Si la tendencia de un conjunto de fuerzas es producir un movimiento, la resultante también lo produce. Existe una condición de equilibrio cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto es igual a cero. Esto equivale a decir que cada fuerza externa se equilibra con la suma de todas las demás fuerzas externas cuando existe equilibrio. En consecuencia, de acuerdo con la primera ley de Newton, un cuerpo en equilibrio debe estar en reposo o en movimiento con velocidad constante, ya que no existe ninguna fuerza externa que no esté equilibrada.

Las magnitudes de las componentes de $x$ y $y$ de cualquier resultante $R$ están dadas por

$$R_x = \Sigma F_x = A_x + B_x + C_x + \dots$$

$$R_y = \Sigma F_y = A_y + B_y + C_y + \dots$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero. En este caso, tanto $R_x$ como $R_y$ deben ser cero; por tanto, para un cuerpo en equilibrio se tiene que

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

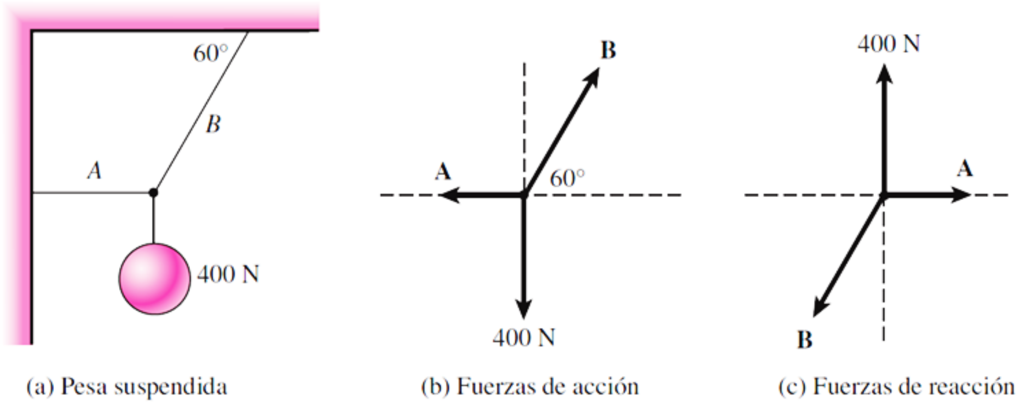
Estas dos ecuaciones representan un enunciado matemático de la primera condición de equilibrio, que puede expresarse como se indica a continuación:

*Un cuerpo se halla en estado de equilibrio traslacional si y sólo si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.*

El término equilibrio traslacional se emplea para distinguir la primera de la segunda condición de equilibrio, la cual se refiere al movimiento rotacional,

**Diagrama de cuerpo libre**

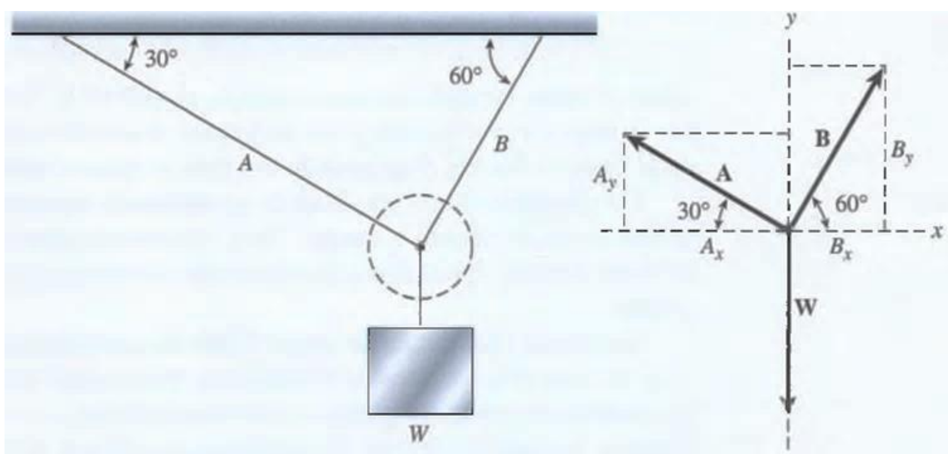
Antes de aplicar la primera condición de equilibrio para resolver problemas físicos es necesario aprender a construir diagramas vectoriales. Considere, por ejemplo, la pesa de 400 N suspendida mediante cuerdas, como se muestra en la figura a. Hay tres fuerzas que actúan sobre el nudo: las ejercidas por el techo, el muro y la Tierra (peso). Si cada una de estas fuerzas se marca y se representa con un vector, es posible trazar un diagrama de vectores como el de la figura b. Un diagrama de ese tipo se llama diagrama de cuerpo libre.
*Un **diagrama de cuerpo libre** es un diagrama vectorial que describe todas las fuerzas que actúan sobre un objeto o cuerpo*. Note que, en el caso de las fuerzas concurrentes, todos los vectores apuntan hacia fuera del centro de los ejes $x$ y $y$, los cuales se intersecan en un origen común.
Al dibujar diagramas de cuerpo libre es importante distinguir entre las fuerzas de acción y las de reacción.




*Diagramas de cuerpo libre que muestran las fuerzas de acción y de reacción.*

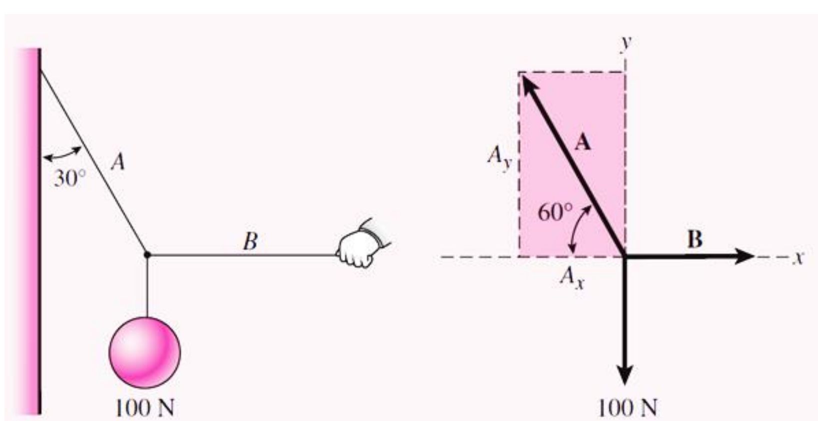
**Ejemplo**

Un bloque de peso W cuelga de una cuerda atada a otras dos cuerdas, A y B, las cuales, a su vez, están sujetas del techo. Si la cuerda B forma un ángulo de 60° con el techo y la cuerda A uno de 30°, trace el diagrama de cuerpo libre del nudo.




**Ejemplo**

Una pelota de 100 N suspendida por una cuerda A es jalada hacia un lado en forma horizontal mediante otra cuerda $B$ y sostenida de tal manera que la cuerda $A$ forma un ángulo de 30º con el muro vertical. Encuentre las tensiones en las cuerdas **A** y **B**.



Aplicando la primera condición de equilibrio. La suma de fuerzas a lo largo del eje $x$ es:

$$\Sigma F_x = B - A_x = 0$$

$$\Sigma F_x = B - A \cos 60° = 0$$

de la cual se obtiene

$$B = A \cos 60° = 0.5A \qquad (1)$$

puesto que cos 60º = 0.5. Resulta una segunda ecuación al sumar las componentes del eje $y$:

$$\Sigma F_y = A_y - 100 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_y = A \text{ sen } 60° - 100 \text{ N} = 0$$

de donde

$$A \text{ sen } 60° = 100 \text{ N} \qquad (2)$$

Finalmente, se resuelve para las fuerzas desconocidas. A partir de la ecuación (2) y como sen 60º = 0.866, entonces

$$0.866A = 100 \text{ N}$$

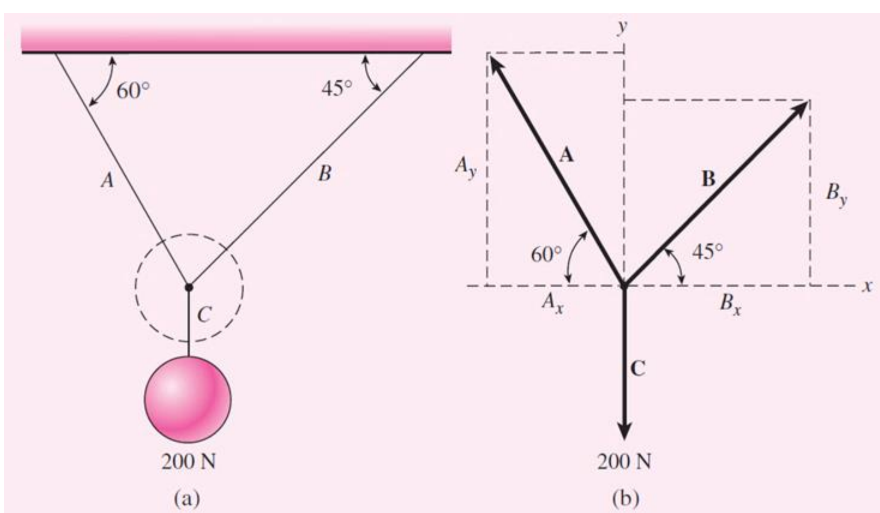
o bien,

$$A = \frac{100 \text{ N}}{0.866} = 115 \text{ N}$$

Ahora que se conoce el valor de A, se despeja B de la ecuación (1) como sigue:

$$B = 0.5A = (0.5)(115 \text{ N}) = 57.5 \text{ N}$$

**Ejemplo**
Una pelota de 200 N cuelga de una cuerda unida a otras dos cuerdas, como se observa en la figura. Encuentre las tensiones en las cuerdas A, B y C.



Con base en el bosquejo proporcionado se construye el diagrama de cuerpo libre (figura b). Las componentes *x* y *y*, calculadas a partir de la figura, se presentan en la tabla.

| Fuerza | $\phi_x$ | Componente *x* | Componente *y* |
|---|---|---|---|
| $A$ | 60° | $A_x = -A \cos 60°$ | $A_y = A \text{ sen } 60°$ |
| $B$ | 45° | $B_x = B \cos 45°$ | $B_y = B \text{ sen } 45°$ |
| $C$ | 90° | $C_x = 0$ | $C_y = -200 \text{ N}$ |

Al sumar las fuerzas a lo largo del eje *x* se obtiene:

$$\Sigma F_x = -A \cos 60° + B \cos 45° = 0$$

que puede simplificarse por sustitución de funciones trigonométricas conocidas; o sea:

$$-0.5A + 0.707B = 0 \quad (1)$$

Se necesita más información para resolver esta ecuación. Obtenemos una segunda ecuación sumando las fuerzas a lo largo del eje *y*, lo que resulta

$$0.866A + 0.707B = 200 \text{ N} \ (2)$$

Ahora se resuelven simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) para A y B mediante el proceso de sustitución. Si se despeja A de la ecuación (1) se obtiene

$$A = \frac{0.707B}{0.5} \quad \text{o} \quad A = 1.414B \qquad (3)$$

Ahora se sustituye esta igualdad en la ecuación (2) y se obtiene

$$0.866\,(1.414B) + 0.707B = 200 \text{ N}$$

que se utiliza para despejar B como sigue:

$$\begin{aligned} 1.225B + 0.707B &= 200 \text{ N} \\ 1.93B &= 200 \text{ N} \\ B &= \frac{200 \text{ N}}{1.93} = 104 \text{ N} \end{aligned}$$

Se puede calcular la tensión A sustituyendo B = 104 N en la ecuación (3):

$$A = 1.414B = 1.414(104 \text{ N}) \text{ o } A = 146 \text{ N}$$

Desde luego, la tensión en la cuerda C es 200 N, ya que debe ser igual al peso.

**Ejercicios. Diagramas de cuerpo libre**

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre correspondiente a las situaciones ilustradas en la figura a y b. Descubra un punto donde actúen las fuerzas importantes y represente cada fuerza como un vector. Calcule el ángulo de referencia y marque las componentes.

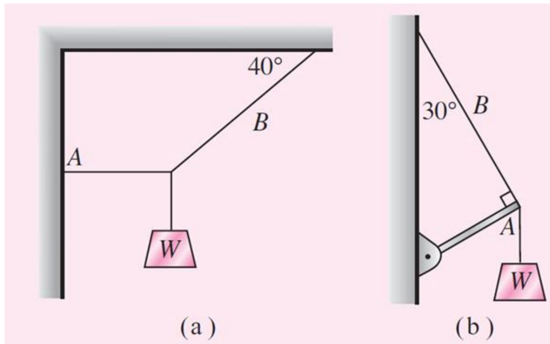


*Figura 1*

2. Estudie cada una de las fuerzas que actúan en el extremo de la viga ligera de la figura. Dibuje el diagrama de cuerpo libre apropiado.

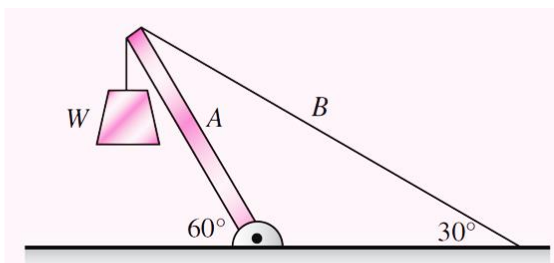


*Figura 2*

**Ejercicios. Equilibrio traslacional**

3. Si el peso del bloque de la figura 1a es de 80 N, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas A y B? Resp. A = 95.3 N, B = 124 N
4. Si W = 600 N en la figura 1b, ¿cuál es la fuerza que ejerce la cuerda sobre el extremo de la vigueta A? ¿Cuál es la tensión en la cuerda B? Resp. A = 300 N, B = 520 N
5. Si la cuerda B de la figura 1a se rompe cuando su tensión es mayor de 400 N, ¿cuál es el peso máximo W? Resp.
6. ¿Cuál es el peso máximo W en el caso de la figura 1b si la cuerda sólo puede soportar una tensión máxima de 800 N? Resp. 924 N
7. Un cuadro de 20 N se cuelga de un clavo, como indica la figura 3, de manera que las cuerdas que lo sostienen forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda? Resp. T = 11.5 N

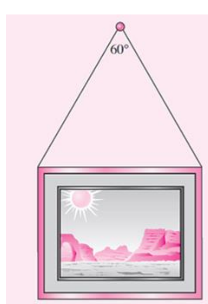


Figura 3

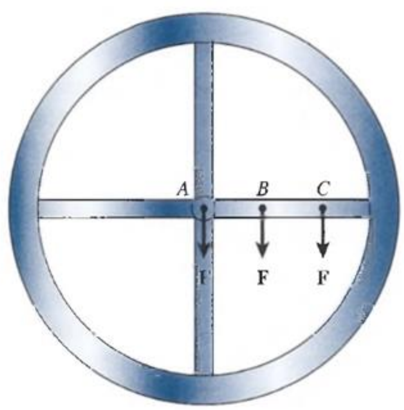
**Cuestionario. Equilibrio traslacional**

1. ¿Qué es el equilibrio traslacional de un sistema?
2. ¿Cómo se aplica la primera ley de Newton en el equilibrio traslacional?
3. ¿Qué es la fuerza resultante?
4. ¿Qué son las fuerzas concurrentes?
5. ¿Qué es un diagrama de cuerpo libre?

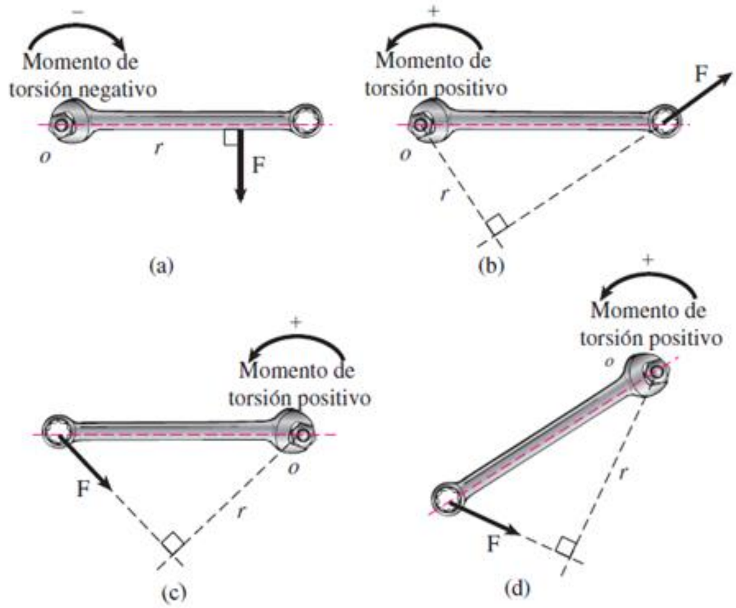
**Equilibrio rotacional**

Existe un equilibrio traslacional cuando la suma vectorial es cero. Sin embargo, en muchos casos las fuerzas que actúan sobre un objeto no tienen un punto de aplicación común. Este tipo de fuerzas se llaman no concurrentes. Por ejemplo, un mecánico ejerce una fuerza en el maneral de una llave para apretar un perno. Un carpintero utiliza una palanca larga para extraer la tapa de una caja de madera. El volante de un automóvil gira por el efecto de fuerzas que no tienen un punto de aplicación común. En casos como éstos, puede haber una tendencia a girar que se define como momento de torsión. Si aprendemos a medir y a prever los momentos de torsión producidos por ciertas fuerzas, será posible obtener los efectos rotacionales deseados. Si no se desea la rotación, es preciso que no haya ningún momento de torsión resultante.

**El brazo de palanca**
*La distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza se llama brazo de palanca de la fuerza*, el cual determina la eficacia de una fuerza dada para provocar el movimiento rotacional. Por ejemplo, si se ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ a distancias cada vez mayores del centro de una gran rueda, gradualmente será más fácil hacer girar la rueda en relación con su centro.
*El brazo de palanca de una fuerza es la distancia perpendicular que hay de la línea de acción de la fuerza al eje de rotación.*




*La fuerza no equilibrada $\mathbf{F}$ no produce ningún efecto rotacional sobre el punto A, pero cada vez es más eficaz a medida que aumenta su brazo de palanca.*




*Ejemplos de brazos de palanca r.*

**Momento de torsión (Torca o Torque)**

La fuerza es un tirón o un empujón que tiende a causar un movimiento. El momento de torsión $\tau$ se define como la tendencia a producir un cambio en el movimiento rotacional. El movimiento rotacional se ve afectado tanto por la magnitud de una fuerza $F$ como por su brazo de palanca $r$. Por tanto, definiremos el momento de torsión como el producto de una fuerza por su brazo de palanca.

*Momento de torsión = fuerza x brazo de palanca*

$$\tau = F\,r$$

En la ecuación $r$ se mide en forma perpendicular a la línea de acción de la fuerza $F$. Las unidades del momento de torsión son las unidades de fuerza por distancia, por ejemplo, newton-metro (N . m) y libra-pie (lb . ft).

Ya antes se estableció una convención de signos para indicar la dirección de las fuerzas. La dirección del momento de torsión depende de si éste tiende a producir la rotación en el sentido de avance de las manecillas del reloj, o sentido retrógrado (sr), o en dirección contraria a ellas o sentido directo (sd). Seguiremos la misma convención que para medir ángulos.

Si la fuerza $F$ tiende a producir una rotación contraria a la de las manecillas con respecto a un eje, el momento de torsión se considerará positivo. Los momentos de torsión en el sentido de avance de las manecillas del reloj se considerarán negativos.

**Ejemplo**

Se ejerce una fuerza de 250 N sobre un cable enrollado alrededor de un tambor de 120 mm de diámetro. ¿Cuál es el momento de torsión producido aproximadamente al centro del tambor?

Observe que la línea de acción de la fuerza de 250 N es perpendicular al diámetro del tambor; por lo tanto, el brazo de palanca es igual al radio del tambor.

$$r = D/2 \qquad r = 60\text{ mm} = 0.06\text{ m}$$

La magnitud del momento de torsión se obtiene a partir de la ecuación.

$$\tau = F\,r = (250\text{ N})\,(0.06\text{ m}) = 15.0\text{ N} \cdot \text{m}$$

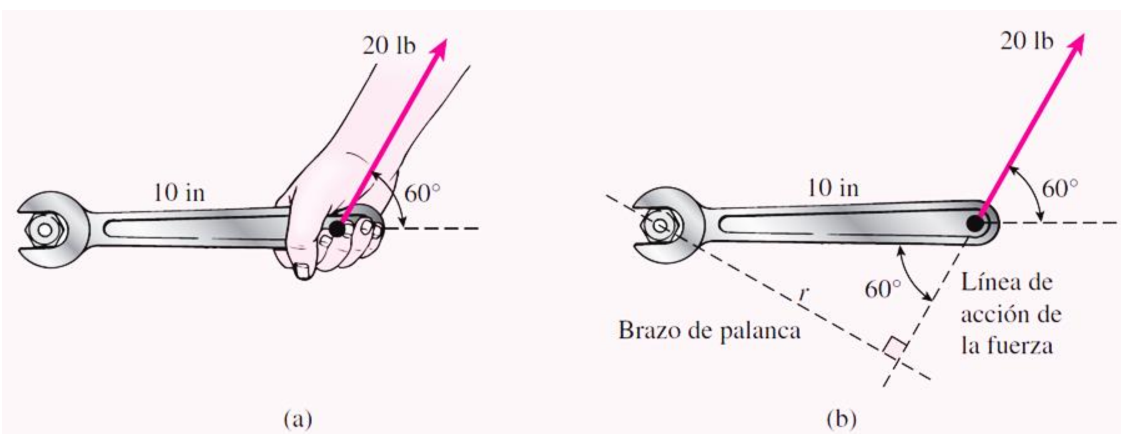
Finalmente, determinamos que el signo del momento de torsión es negativo porque tiende a causar una rotación aproximadamente al centro del tambor. Por tanto, la respuesta debe escribirse como

$$\tau = —15.0\text{ N} \cdot \text{m}$$


*Fuerza tangencial ejercida por un cable enrollado alrededor de un tambor.*

**Ejemplo**

Un mecánico ejerce una fuerza de 20 Ib en el extremo de una llave inglesa de 10 in, como se observa en la figura. Si este tirón forma un ángulo de 60° con el mango de la llave, ¿cuál es el momento de torsión producido en la tuerca?




Primero trace un esquema ordenado, extienda la línea de acción de la fuerza de 20 Ib, y dibuje el brazo de palanca. Observe que el brazo de palanca *r* es perpendicular tanto a la línea de acción de la fuerza como al eje de rotación. Debe recordar que el brazo de palanca es una construcción geométrica y puede estar o no sobre alguna estructura física, como el mango de la llave de tuercas. A partir de la figura se obtiene

$$r = (10\text{ in})\text{ sen }60° = 8.66\text{ in}$$

$$\tau = Fr — (20\text{ lb})(8.66\text{ in}) = 173\text{ Ib} \cdot \text{in}$$

En algunas aplicaciones, es más útil trabajar con las componentes de una fuerza para obtener el momento de torsión resultante. En el ejemplo anterior se podría haber separado el vector de 20 Ib en sus componentes horizontal y vertical. En vez de hallar el momento de torsión de una sola fuerza, sería necesario encontrar el momento de torsión de las dos fuerzas componentes. Como indica la figura, el vector de 20 Ib tiene sus componentes $F_x$ y $F_y$, las cuales se calculan por trigonometría:

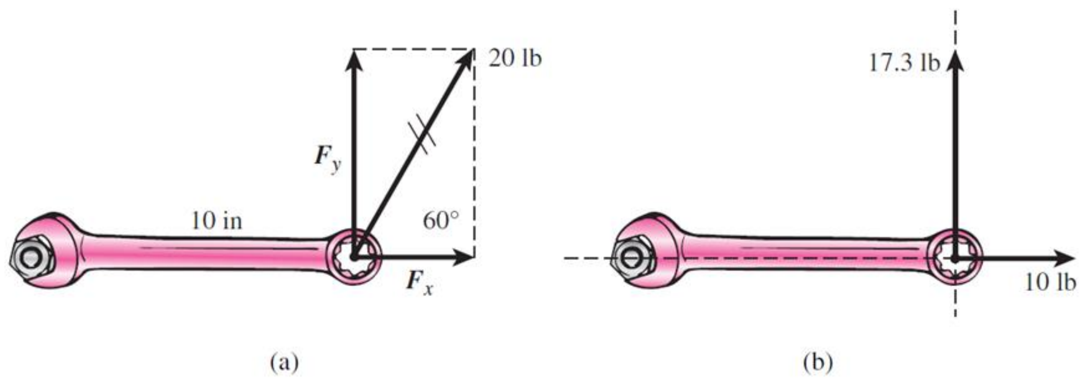
$$F_x = (20\ \text{lb})(\cos 60°) = 10\ \text{Ib}$$

$$F_y = (20\ \text{lb})(\text{sen}\ 60°) = 17.3\ \text{Ib}$$

Observe en la figura *b* que la línea de acción de la fuerza de 10 Ib pasa por el eje de rotación. Esto no produce ningún momento de torsión porque su brazo de palanca es cero. Por tanto, el momento de torsión total se debe a la componente de 17.3 Ib, que es perpendicular al mango. El brazo de palanca de esta fuerza es la longitud de la llave inglesa, y el momento de torsión es

$$\tau = Fr = (17.3\ \text{lb})(10\ \text{in}) = 173\ \text{Ib} \bullet \text{in}$$

Observe que utilizando este método se obtiene el mismo resultado. No hacen falta más cálculos, porque la componente horizontal tiene un brazo de palanca de cero. Si elegimos las componentes de una fuerza a lo largo y perpendicularmente a la distancia conocida, tan sólo nos interesa el momento de torsión de la componente perpendicular.




*Método de las componentes para el cálculo del momento de torsión.*

**Momento de torsión resultante**

La resultante de varias fuerzas se puede determinar sumando las componentes *x* y *y* de cada fuerza, y así obtener las componentes de la resultante.

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \ldots \qquad R_y = A_y + B_y + C_y + \ldots$$

Este procedimiento se aplica a fuerzas que tienen un punto de intersección común. Las fuerzas que carecen de una línea de acción común producen una resultante del momento de torsión, además de una resultante de la fuerza traslacional. Cuando las fuerzas aplicadas actúan en el mismo plano, el momento de torsión resultante es la suma algebraica de los momentos de torsión positivos y negativos debidos a cada fuerza.

$$\tau_R = \Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots$$

Hay que recordar que los momentos de torsión en contrasentido al avance de las manecillas del reloj son positivos, y los que tienen el mismo sentido de avance de las manecillas son negativos.

**Equilibrio**

La condición para el equilibrio traslacional quedó establecida en forma de ecuación como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

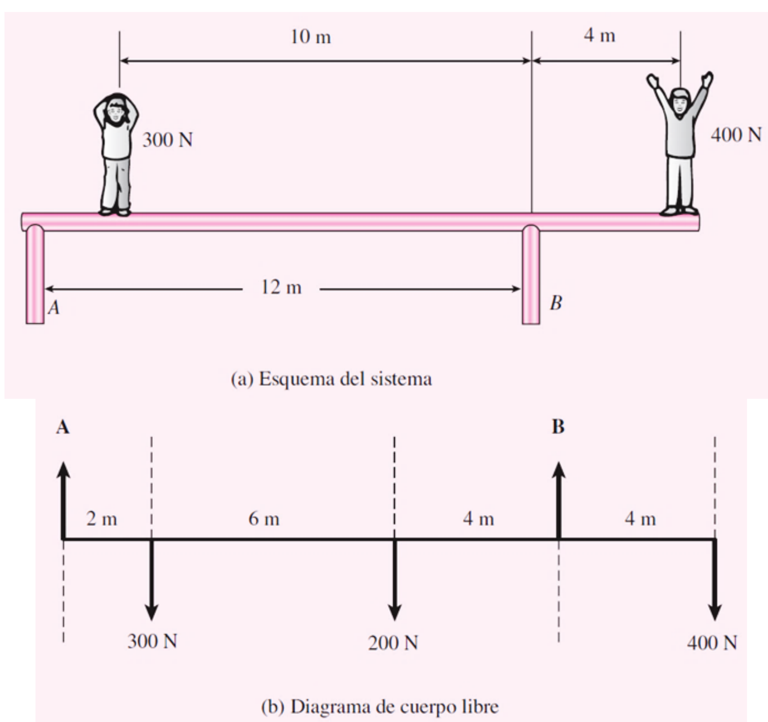
Si se desea asegurar que los efectos rotacionales también estén equilibrados, es preciso estipular que no hay momento de torsión resultante.
Por tanto, ***la segunda condición de equilibrio*** es:

*La suma algebraica de todos los momentos de torsión respecto de cualquier eje debe ser cero.*

$$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots = 0$$

La segunda condición de equilibrio simplemente nos indica que los momentos de torsión en el sentido de avance de las manecillas del reloj están equilibrados con precisión por los momentos de torsión en contrasentido al avance de las manecillas. Más aún, puesto que la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir cualquier punto como eje de rotación. Mientras los brazos de palanca se midan respecto al mismo punto para cada fuerza, el momento de torsión resultante será de cero. Los problemas se simplifican si se elige el eje de rotación en el punto de aplicación de una fuerza desconocida. Si una fuerza particular tiene un brazo de palanca de cero, no contribuye al momento de torsión, independientemente de su magnitud.

**Ejemplo**
Considere la situación que se presenta en la figura: Una niña que pesa 300 N y un niño que pesa 400 N están parados sobre una plataforma sostenida por dos soportes A y B. ¿Qué fuerzas ejercen los soportes sobre la plataforma?



(b) Diagrama de cuerpo libre

*Diagrama de cuerpo libre que indica todas las fuerzas y las distancias entre ellas. Suponga que todo el peso de la tabla actúa en su centro geométrico para el cálculo del momento de torsión.*

Al aplicar la primera condición de equilibrio a las fuerzas verticales, obtenemos

$$\Sigma F_y = 0;\ \mathrm{A + B + 300\ N + 200\ N + 400\ N + 0}$$

Simplificando $\mathrm{A + B = 900\ N}$

Puesto que esta ecuación presenta dos incógnitas, es preciso tener más información. Por tanto, aplicamos la segunda condición de equilibrio.

Como la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir un eje de rotación en cualquier parte que deseemos. Una opción lógica sería elegir un punto donde actúe una de las fuerzas desconocidas porque así se tendría un brazo de palanca de cero. Tomemos la suma de los momentos de torsión respecto al soporte B. Por la segunda condición de equilibrio se obtiene

$$\Sigma\tau_B = 0;\ \mathrm{-A\ (12\ m) + (300\ N)\ (10\ m) + (200\ N)\ (4\ m) - (400\ N)(4\ m) = 0}$$

Note que la fuerza de 400 N y la fuerza A tienden a producir una rotación en el sentido de avance de las manecillas del reloj con respecto a B. (Sus momentos de torsión fueron negativos.) Simplificando se obtiene

$$\mathrm{-\ (12\ m)\ A + 3000\ N \bullet m - 1600\ N \bullet m + 800\ N \bullet m = 0}$$

Al añadir (12 m) A a ambos lados y simplificar queda

$$\mathrm{2200\ N \bullet m = (12\ m)\ A}$$

Al dividir ambos lados entre 12 m, resulta

$$\mathrm{A = 183\ N}$$

Ahora, para determinar la fuerza ejercida por el soporte B, tomemos en cuenta de nuevo la ecuación obtenida a partir de la primera condición de equilibrio.

$$\mathrm{A + B = 900\ N}$$

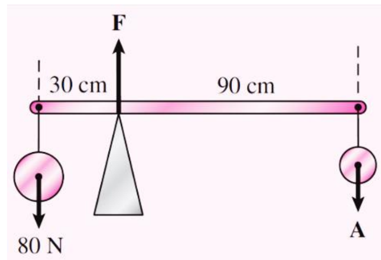
Al despejar B se obtiene

$$\mathrm{B = 900\ N — A = 900\ N - 183\ N = 717\ N}$$

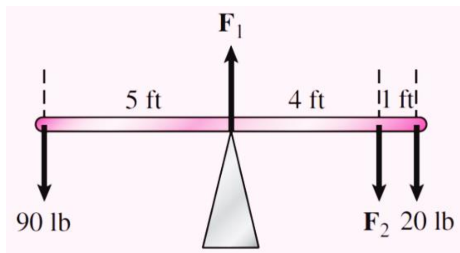
**Ejercicios. Equilibrio rotacional**

1. En una regla graduada se colocan pesas de 10 N, 20 N y 30 N en las marcas de 20 cm, 40 cm y 60 cm, respectivamente. La regla se equilibra sobre un solo apoyo en su punto medio. ¿En qué punto habrá que agregar una pesa de 5 N para obtener el equilibrio? Resp. 40 cm de la marca del peso de 5 N
2. Una tabla de 8 m con peso insignificante está sostenida en un punto localizado a 2 m del extremo derecho, donde se le aplica un peso de 50 N. ¿Qué fuerza descendente se debe ejercer en el extremo izquierdo para alcanzar el equilibrio? Resp. 16.7 N

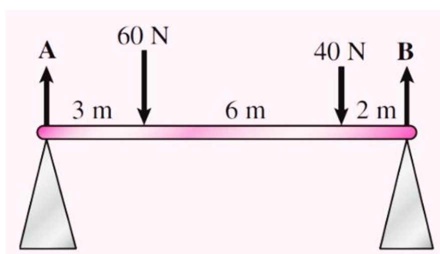
3. Suponga que la barra de la figura tiene un peso insignificante. Halle las fuerzas F y A considerando que el sistema está en equilibrio. Resp. A = 26.7 N, F = 107 N




4. ¿Cuáles deben ser las fuerzas $F_1$ y $F_2$ para que se alcance el equilibrio en la figura? No tome en cuenta el peso de la barra. Resp. $F_1$ = 198 lb, $F_2$ = 87.5 N




5. Considere la barra ligera sostenida como se indica en la figura. ¿Cuáles son las fuerzas que ejercen los soportes A y B? Resp. A = 50.9 N, B = 49.1 N




**Cuestionario. Equilibrio rotacional**

1. ¿Qué es el brazo de palanca de una fuerza?
2. ¿Qué es el momento de torsión?
3. ¿Qué condición debe cumplirse para el equilibrio rotacional?
4. ¿Por qué no existe efecto rotacional si la fuerza actúa en el eje de rotación?

**Centro de gravedad**

Cada partícula que existe en la Tierra tiene al menos una fuerza en común con cualquier otra partícula: su peso. En el caso de un cuerpo formado por múltiples partículas, estas fuerzas son esencialmente paralelas y están dirigidas hacia el centro de la Tierra. Independientemente de la forma y tamaño del cuerpo, ***existe un punto en el que se puede considerar que está concentrado todo el peso del cuerpo. Este punto se llama centro de gravedad del cuerpo.*** Por supuesto, el peso no actúa de hecho en este punto, pero podemos calcular el mismo tipo de momento de torsión respecto a un eje dado si consideramos que todo el peso actúa en este punto.

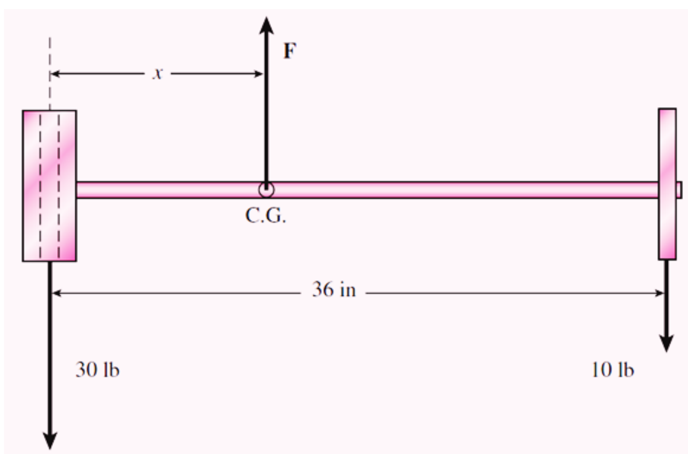
El centro de gravedad de un cuerpo regular, como una esfera uniforme, un cubo, una varilla o una viga, se localiza en su centro geométrico.

Aun cuando el centro de gravedad es un punto fijo, no necesariamente tiene que estar dentro del cuerpo. Por ejemplo, una esfera hueca, un aro circular y un neumático tienen su centro de gravedad fuera del material del cuerpo.

A partir de la definición de centro de gravedad, se acepta que cualquier cuerpo suspendido desde este punto está en equilibrio. Esto es verdad, ya que el vector peso, que representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada parte del cuerpo, tiene un brazo de palanca igual a cero. Por tanto, es posible calcular el centro de gravedad de un cuerpo, determinando el punto en el cual una fuerza ascendente producirá un equilibrio rotacional.

**Ejemplo**

Calcule el centro de gravedad del sistema de barra con pesas que se presenta en la figura. Suponga que el peso de la barra de 36 in es insignificante.




Puesto que la fuerza resultante es cero, la fuerza ascendente F debe ser igual a la suma de las fuerzas hacia abajo y podemos escribir

$$F = 30 \text{ lb} + 10 \text{ lb} = 40 \text{ lb}$$

La suma de los momentos de torsión respecto al centro geométrico de la masa izquierda también debe ser igual a cero, así que

$$\Sigma\tau = (40 \text{ lb})\, x + (30 \text{ lb})(0) - (10 \text{ lb})(36 \text{ in}) = 0$$

$$(40 \text{ lb})\, x = 360 \text{ lb . in}$$

$$x = 9.00 \text{ in}$$

Si las pesas estuvieran suspendidas desde el techo a un punto a 9 in del centro de la masa izquierda, el sistema estaría en equilibrio. Este punto es el centro de gravedad.

**Ejercicios. Centro de gravedad**

1. Una barra de material uniforme tiene una longitud de 6 m y pesa 30 N. De su extremo izquierdo pende una pesa de 50 N y se aplica una fuerza de 20 N en su extremo derecho. ¿A qué distancia del extremo izquierdo se deberá aplicar una sola fuerza ascendente para establecer el equilibrio? Resp. 2.10 m
2. Una esfera de 40 N y una esfera de 12 N están conectadas por una varilla ligera de 200 mm de longitud.¿A qué distancia del punto medio de la esfera de 40 N está el centro de gravedad? Resp. $x$ = 46.2 mm
3. Pesas de 2, 5, 8 y 10 N penden de una varilla ligera de 10 m a distancias de 2, 4, 6 y 8 m del extremo izquierdo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo está el centro de gravedad? Resp. 6.08 m

**Cuestionario. Centro de gravedad**

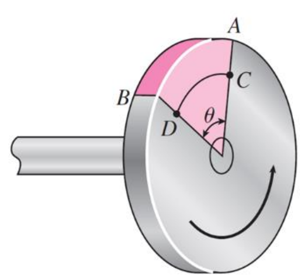
1. ¿Qué es el centro de gravedad?
2. ¿Cuál es el valor del brazo de palanca del vector peso? Explica.
3. Menciona un ejemplo donde el centro de gravedad no se encuentre dentro del objeto.

**Rotación de cuerpos rígidos**

Es posible que un objeto se mueva en una trayectoria curva o que tenga un movimiento rotacional. Por ejemplo, las ruedas, ejes, poleas, giróscopos y muchos otros dispositivos mecánicos, giran sobre su eje sin que haya movimiento traslacional.

**Desplazamiento angular**

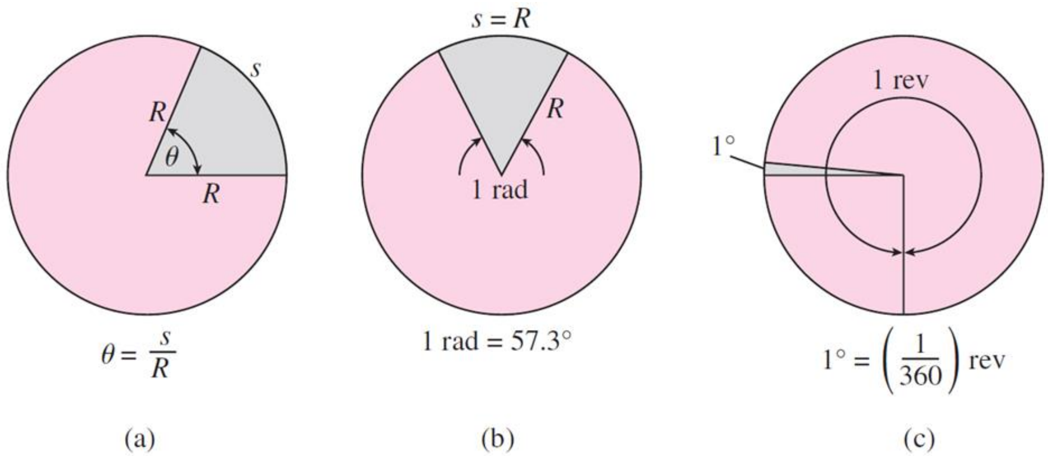
El desplazamiento angular de un cuerpo describe la cantidad de rotación. Si el punto A en el disco giratorio de la figura gira sobre su eje hasta el punto B, el desplazamiento angular se denota por el ángulo $\theta$. Hay varias formas de medir este ángulo. Ya nos hemos familiarizado con las unidades de grados y revoluciones, las cuales están relacionadas de acuerdo con la definición 1 rev = 360°




*El desplazamiento angular $\theta$ se indica por la porción sombreada del disco. El desplazamiento angular es el mismo de C a D que de A a B para un cuerpo rígido.*

Ninguna de estas unidades es útil para describir la rotación de cuerpos rígidos. Una medida más fácil de aplicar el desplazamiento angular es el radián (rad). Un ángulo de 1 rad es un ángulo central cuyo arco $s$ es igual en longitud al radio $R$. Es más común que el radián se defina por la siguiente ecuación:

$$\theta = \frac{s}{R}$$




*Medida del desplazamiento angular y una comparación de unidades.*

donde $s$ es la longitud de arco de un círculo descrito por el ángulo $\theta$. Puesto que el cociente $s$ entre $R$ es la razón de dos distancias, el radián es una cantidad sin unidades.
El factor de conversión que permite relacionar radianes con grados se encuentra considerando un arco de longitud $s$ igual al perímetro o circunferencia de un círculo $2\ \pi R$. Dicho ángulo en radianes se obtiene a partir de:

$$\theta = \frac{2\pi \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi \text{ rad}$$

Así tenemos,

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\ \pi \text{ rad}$$

de donde se observa que

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

**Ejemplo**
Un asiento en el perímetro de una rueda de la fortuna en la feria experimenta un desplazamiento angular de 37°. Si el radio de la rueda es 20 m, ¿qué longitud de arco describe el asiento?

$$\theta = (37°)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 0.646 \text{ rad}$$

La longitud de arco está dada por

$$s = R\theta = (20 \text{ m})(0.646 \text{ rad}) = 12.9 \text{ m}$$

La unidad radián desaparece porque representa una relación de longitud a longitud (m/m = 1).

**Velocidad angular**
A la razón de cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo se le llama velocidad angular. Por lo tanto, si un objeto gira a través de un ángulo $\theta$ en un tiempo $t$, su velocidad angular media está dada por

$$\overline{\omega} = \frac{\theta}{t} \qquad \textit{Velocidad angular}$$

El símbolo $\omega$ (letra griega omega) se usa para denotar la velocidad angular. Cuando una barra aparece sobre el símbolo, indica que la velocidad angular es un valor medio. Aun cuando la velocidad angular puede expresarse en revoluciones por minuto (rpm) o revoluciones por segundo, en la mayoría de los problemas físicos es necesario utilizar radianes por segundo para adaptarse a la opción básica del desplazamiento angular $\theta$ en radianes. Tenga en mente que la velocidad angular puede estar en el sentido de las manecillas del reloj o contrasentido; es decir, tiene dirección. Debemos elegir una dirección positiva para la rotación y sustituir los signos que concuerden con esa elección.

Puesto que la velocidad de rotación en gran número de problemas técnicos se expresa en términos revoluciones por minuto o revoluciones por segundo, es conveniente hallar una expresión para la conversión a radianes por segundo. Si la frecuencia de revoluciones en rev/s se denota por medio del símbolo $f$, la velocidad angular en rad/s está dada por

$$\omega = 2\pi f$$

Si la frecuencia está en rpm en vez de rev/s, el factor de conversión es ($2\pi/60$).

**Ejemplo**
La rueda de una bicicleta tiene de radio de 33 cm y gira 40 revoluciones en 1 min. ¿Qué distancia lineal recorrerá la bicicleta en 30 s?

Primero se convierte la frecuencia de rpm a rev/s.

$$f = \left(\frac{40 \text{ rev}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 0.667 \text{ rev/s}$$

Sustituyendo esta frecuencia en la ecuación se obtiene la velocidad angular.

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(0.667 \text{ rev/s}) = 4.19 \text{ rad/s}$$

$$s = \theta R \qquad \text{y} \qquad \theta = \omega t$$

la distancia $s$ es

$$s = (\omega t)\, R = (4.19 \text{ rad/s})(30 \text{ s})(0.33 \text{ m}) = 41.5 \text{ m}$$

**Aceleración angular**
Al igual que el movimiento rectilíneo, el movimiento rotacional puede ser uniforme o acelerado.
La velocidad de la rotación puede aumentar o disminuir bajo la influencia de un momento de torsión resultante. Por ejemplo, si la velocidad angular cambia de un valor inicial $\omega_o$ a un valor final $\omega_f$ en un tiempo $t$, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

La letra griega $\alpha$ (alfa) denota la aceleración angular. Una forma más útil de esta ecuación es

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

Al comparar la ecuación con la ecuación para la aceleración lineal se verá que sus formas son idénticas si establecemos analogías entre los parámetros angulares y lineales.
Ahora que hemos introducido el concepto de velocidades angulares inicial y final, podemos expresar la velocidad angular media en términos de sus valores inicial y final:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_f + \omega_0}{2}$$

Al sustituir esta igualdad para ω en la ecuación se obtiene una expresión más útil para el desplazamiento angular:

$$\theta = \overline{\omega}t = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t$$

Esta ecuación es similar a una ecuación deducida para el movimiento rectilíneo.

$$s\ (\mathrm{m}) \leftrightarrow \theta\ (\mathrm{rad})$$
$$v\ (\mathrm{m/s}) \leftrightarrow \omega\ (\mathrm{rad/s})$$
$$a\ (\mathrm{m/s^2}) \leftrightarrow \alpha\ (\mathrm{rad/s^2})$$

**Comparación d las ecuaciones para aceleración lineal y angular**

| Aceleración lineal constante | Aceleración angular constante |
|---|---|
| (1) $s = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$ | $\theta = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t$ |
| (2) $v_f = v_0 + at$ | $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$ |
| (3) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ |
| (4) $s = v_f t - \frac{1}{2}at^2$ | $\theta = \omega_f t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ |
| (5) $2as = v_f^2 - v_0^2$ | $2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$ |

Al aplicar estas fórmulas, debemos tener cuidado de elegir las unidades apropiadas para cada cantidad. También es importante seleccionar una dirección (en el sentido del avance de las manecillas del reloj o contrario a éste) como positiva y conservarla en forma consistente para asignar los signos apropiados a cada cantidad.

**Ejemplo**
Un volante aumenta su velocidad de rotación de 6 a 12 rev/s en 8 s. Determine la aceleración angular en radianes por segundo al cuadrado.

Las velocidades angulares son:

$$\omega_0 = 2\pi f = \left(\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{rev}}\right)\left(\frac{6\ \mathrm{rev}}{\mathrm{s}}\right) = 37.7\ \mathrm{rad/s}$$
$$\omega_f = 2\pi f = \left(\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{rev}}\right)\left(\frac{12\ \mathrm{rev}}{\mathrm{s}}\right) = 75.4\ \mathrm{rad/s}$$

Podemos resolver para a usando la definición de aceleración angular.

Dados: $\omega_0 = 37.7$ rad/s; $\omega_f = 75.4$ rad/s; $t = 8$ s Encuentre: $\alpha = ?$

Seleccionemos la ecuación (2) de la tabla como la ecuación que contiene $\alpha$ y no $\theta$. Al resolver para $\alpha$ obtenemos

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{75.4 \text{ rad/s} - 37.7 \text{ rad/s}}{8 \text{ s}}$$
$$\alpha = 4.71 \text{ rad/s}^2$$

**Ejemplo**

Una rueda de esmeril que gira inicialmente a 6 rad/s recibe una aceleración constante de 2 rad/s$^2$ durante 3 s. Determine su desplazamiento angular y su velocidad angular final.

Dados: $\omega_0 = 6$ rad/s; $\alpha = 2$ rad/s$^2$; $t = 3$ s Encuentre: $\theta$

La ecuación (3) contiene $\alpha$ y no $\omega_f$ . El desplazamiento angular es

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = (6 \text{ rad/s})\ (3 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}\ (2 \text{ rad/s}^2)\ (3 \text{ s})^2 = 27.0 \text{ rad}$$

La velocidad angular final $\omega_f$ se obtiene a partir de la ecuación (2)

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_f = 6 \text{ rad/s} + (2 \text{ rad/s}^2)\ (3 \text{ s}) = 12.0 \text{ rad/s}$$

**Ejercicios. Rotación de cuerpos rígidos**

1. Un cable está enrollado en torno de un carrete de 80 cm de diámetro. ¿Cuántas revoluciones de este carrete se requieren para que un objeto atado al cable recorra una distancia rectilínea de 2 m? ¿Cuál es el desplazamiento angular? Resp. 0.796 rev, 5 rad
2. Un punto localizado en el borde de una gran rueda cuyo radio es 3 m se mueve en un ángulo de 37°. Halle la longitud del arco descrito por ese punto. Resp. 1.94 m
3. Un motor eléctrico gira a 600 rpm. ¿Cuál es su velocidad angular? ¿Cuál es el desplazamiento angular después de 6 s? Resp. 62.8 rad/s, 377 rad
4. Una polea giratoria completa 12 revoluciones en 4 s. Calcule la velocidad angular media en revoluciones por segundo, revoluciones por minuto y radianes por segundo. Resp. *f* = 3 rev/s, 28.6 rpm, 18.8 rad/s
5. Un cubo cuelga de una cuerda enrollada con varias vueltas en un carrete circular cuyo radio es de 60 cm. El cubo parte del reposo y asciende hasta una altura de 20 m en 5 s. (a) ¿Cuántas revoluciones giró el carrete? (b) ¿Cuál fue la rapidez angular media del carrete al girar? Resp. (a) 5.31 rev; (b) 6.67 rad/s

**Cuestionario. Rotación de cuerpos rígidos**

1. ¿Qué es el desplazamiento angular?
2. ¿Qué es la velocidad angular?
3. ¿Qué es la aceleración angular?
4. Menciona un ejemplo donde el movimiento se describa mediante las ecuaciones de aceleración angular constante.

**Relación entre los movimientos rotacional y rectilíneo**

El eje de rotación de un cuerpo rígido que gira se puede definir como la línea de partículas que permanecen estacionarias durante la rotación. Se puede tratar de una línea a través del cuerpo, como en el caso de un trompo, o puede ser una línea a través del espacio, como un aro en rotación. En cualquier caso, nuestra experiencia nos dice que cuanto más lejos está la partícula del eje de rotación, mayor es su velocidad tangencial. Este hecho se expresa mediante la fórmula

$$v = 2\,\pi\, f R$$

donde $f$ es la frecuencia de rotación. Ahora deduzcamos una relación similar en términos de velocidad angular. La partícula de la figura gira a través de un arco s que se describe como

$$s = \theta\, R$$

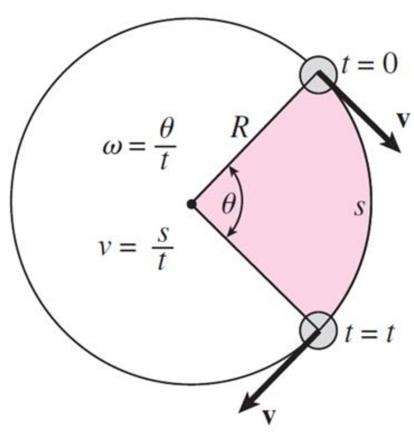
Si la distancia es recorrida en un tiempo $t$, la velocidad tangencial de la partícula está dada por

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\theta R}{t}$$

Puesto que $\theta/t = \omega$, la velocidad tangencial se puede expresar como una función de la velocidad angular.

$$\omega = v\, R$$

La velocidad angular se expresa como una función de la frecuencia de revolución.




*Relación entre velocidad angular y velocidad tangencial.*

**Ejemplo**
Un eje de tracción tiene una velocidad angular de 60 rad/s. ¿A qué distancia del eje deben colocarse unos contrapesos para que éstos tengan una velocidad tangencial de 12 m/s?

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{12 \text{ m/s}}{60 \text{ rad/s}} = 0.200 \text{ m}$$

Consideremos de nuevo una partícula que se mueve en un círculo de radio $R$ y supongamos que la velocidad tangencial cambia de cierto valor inicial $v_0$ al valor final $v_f$ en un tiempo $t$. La aceleración tangencial $a_T$ de dicha partícula está dada por

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{t}$$

Debido a la estrecha relación entre la velocidad tangencial y la angular, podemos expresar también la aceleración tangencial en función de un cambio en la velocidad angular.

$$a_T = \frac{\omega_f R - \omega_0 R}{t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} R$$

o bien

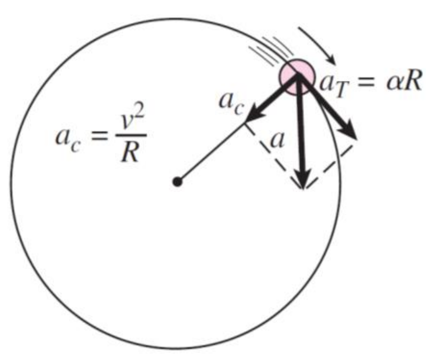
$$a_T = \alpha R$$

donde $\alpha$ representa la aceleración angular.

Debemos ser cuidadosos en distinguir entre la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta definida por

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración tangencial representa un cambio en la velocidad tangencial, mientras que la aceleración centrípeta representa tan sólo un cambio en la dirección del movimiento. La distinción se muestra gráficamente en la figura. La aceleración resultante puede determinarse calculando el vector suma de las aceleraciones tangencial y centrípeta.




*Relación entre las aceleraciones tangencial y centrípeta.*

**Ejemplo**

Calcule la aceleración resultante de una partícula que se mueve en un círculo de radio 0.5 m en el instante en que su velocidad angular es 3 rad/s y su aceleración angular es 4 rad/s$^2$.

Dado que $R = 0.5$ m y $\omega = 3$ rad/s, obtenemos

$$v = \omega R = (3 \text{ rad/s})\,(0.5 \text{ m}) = 1.50 \text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(1.50 \text{ m/s})^2}{(0.5 \text{ m})} = 4.50 \text{ m/s}^2$$

Ahora bien, la aceleración tangencial es

$$a_T = \alpha R = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ m});\ a_T = 2.00 \text{ m/s}^2$$

La magnitud de la aceleración resultante se obtiene del teorema de Pitágoras.

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{(2.00 \text{ m/s}^2)^2 + (4.50 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$a = 4.92 \text{ m/s}^2$$

**Ejercicios. Relación entre movimiento rotacional y lineal**

1. Una rueda de 15.0 cm de radio parte del reposo y completa 2.00 revoluciones en 3.00 s. (a) ¿Cuál es la velocidad angular media en radianes por segundo? (b) ¿Cuál es la velocidad tangencial final de un punto situado en el borde de la rueda? Resp. 4.19 rad/s, $v_f = 1.26$ m/s
2. La velocidad tangencial adecuada para fabricar material de acero es de 70 cm/s aproximadamente. ¿A cuántas revoluciones por minuto deberá girar en un torno un cilindro de acero cuyo diámetro es de 8 cm? Resp. $f = 16.7$ rpm
3. Un carrete circular de 40 cm de radio gira inicialmente a 400 rev/min. Luego se detiene por completo después de 50 revoluciones. ¿Cuáles fueron la aceleración angular y el tiempo de detención? Resp. $t = 15.0$ s
4. Una correa pasa por la ranura de una polea cuyo diámetro es de 40 cm. La polea gira con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s$^2$. La rapidez rotacional es de 2 rad/s en el $t = 0$. ¿Cuáles son el desplazamiento angular y la velocidad angular de la polea 2 s más tarde? Resp. 11.0 rad, 9.00 rad/s
5. Una rueda gira inicialmente a 6 rev/s y después se somete a una aceleración angular constante de 4 rad/s$^2$. ¿Cuál es su velocidad angular después de 5 s? ¿Cuántas revoluciones completará la rueda? Resp. 57.7 rad/s, 38.0 rev
6. Un disco rectificador detiene su movimiento en 40 revoluciones. Si la aceleración de frenado fue de -6 rad/s$^2$, ¿cuál fue la frecuencia inicial de giro en revoluciones por segundo? Resp. $f = 8.74$ rev/s
7. Una polea de 320 mm de diámetro gira inicialmente a 4 rev/s y luego recibe una aceleración angular constante de 2 rad/s$^2$. ¿Cuál es la velocidad tangencial de una correa montada en dicha polea, al cabo de 8 s? ¿Cuál es la aceleración tangencial de la correa? Resp. 6.58 m/s, 0.320 m/s$^2$

**Cuestionario. Relación entre movimiento rotacional y lineal**

1. ¿Cómo varía la velocidad tangencial de una partícula con movimiento rotacional al alejarse del eje de rotación?
2. Menciona un ejemplo conocido de la pregunta anterior.
3. ¿Cuál es la diferencia entre la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta?
4. ¿Cómo se determina la aceleración resultante en el movimiento rotacional?

**Momento de inercia**

Una partícula que se mueve en un círculo de radio $R$ tiene una rapidez lineal dada por

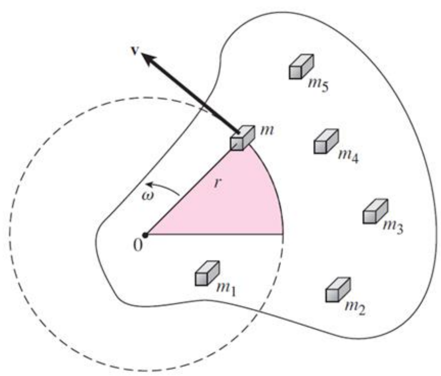
$$v = \omega R$$

Si la partícula tiene una masa $m$, tendrá una energía cinética que se obtiene por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

La energía cinética total de un cuerpo es la suma de las energías cinéticas de cada partícula que forma el cuerpo.

$$K = \sum \frac{1}{2}m\omega^2r^2$$




*Rotación de un cuerpo extenso. El cuerpo puede considerarse como un conjunto de masas individuales que giran con la misma velocidad angular.*

Puesto que la constante ½ y la velocidad angular ω son las mismas para todas las partículas, se puede reorganizar la ecuación anterior y obtener

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2$$

La cantidad, $\Sigma\, mr^2$, tiene el mismo valor para un cuerpo dado independientemente de su estado de movimiento. Se define esta cantidad como el momento de inercia y se representa por $I$:

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots$$

$$I = \sum mr^2$$

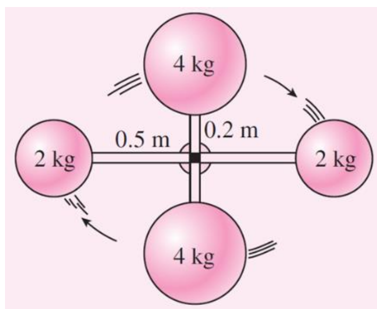
La unidad del SI para $I$ es el kilogramo-metro al cuadrado y la unidad del SUEU es el slug-ft cuadrado.

Utilizando esta definición, podemos expresar la energía cinética rotacional de un cuerpo en términos de su momento de inercia y de su velocidad angular:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Note la similitud entre los términos $m$ para el movimiento rectilíneo e $I$ para el movimiento rotacional.

**Ejemplo**
Calcule el momento de inercia para el sistema ilustrado en la figura. El peso de las barras que unen las masas es insignificante y el sistema gira con una velocidad angular de 6 rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional? (Considere que las masas están concentradas en un punto.)




Cálculo del momento de inercia del sistema.

$$I = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$$
$$I = (2\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 + (4\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 + (4\text{ kg})(0.2\text{ m})^2$$
$$I = 1.32\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

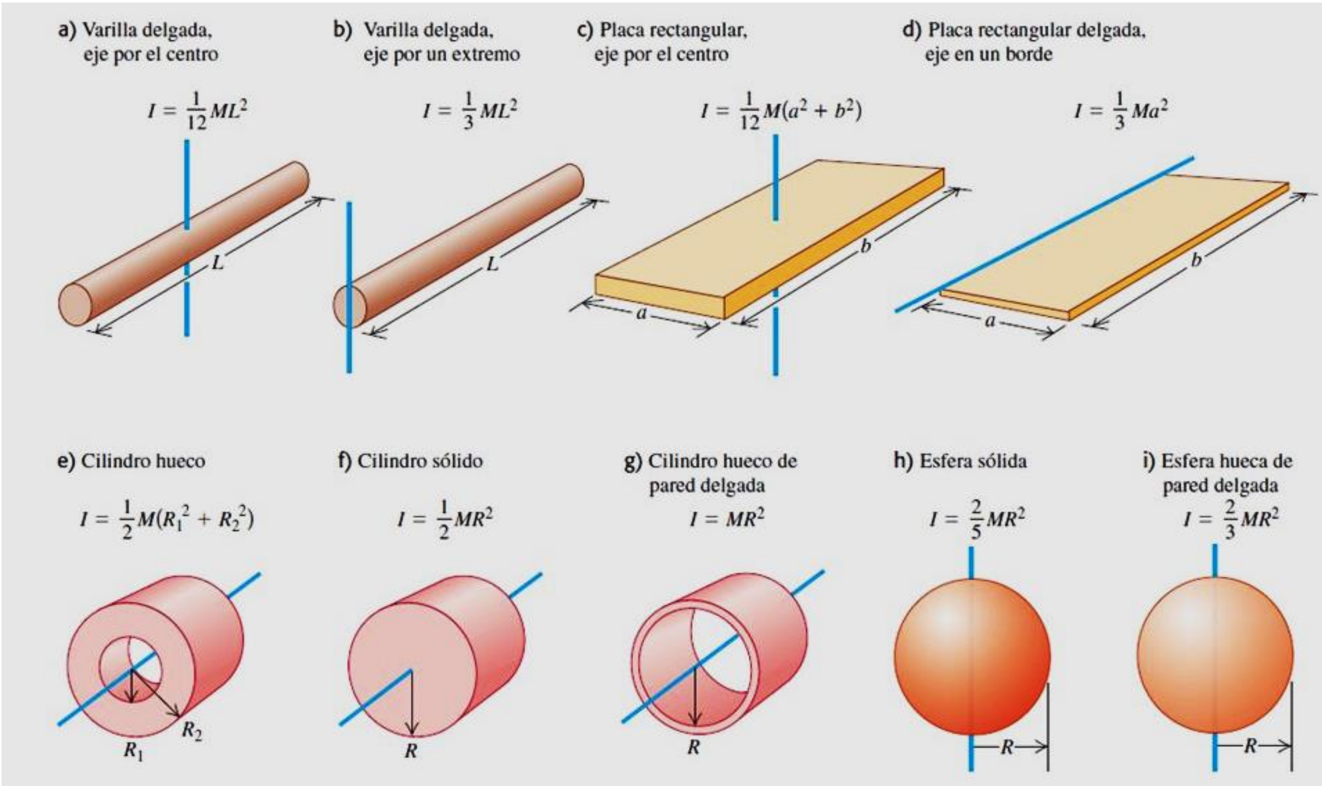
Usando este resultado y el hecho de que $\omega$ = 6 rad/s, la energía cinética rotacional está dada por

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(1.32\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(6\text{ rad/s})^2 \qquad \text{o} \qquad K = 23.8\text{ J}$$

Para cuerpos que no están compuestos por masas separadas, sino que son en realidad distribuciones continuas de materia, los cálculos del momento de inercia generalmente requieren conocimientos de cálculo integral. En la figura se muestran algunos casos sencillos, junto con las fórmulas para calcular sus momentos de inercia.
A veces es conveniente expresar la inercia rotacional de un cuerpo en términos de su radio de giro k. Esta cantidad se define como la distancia radial del centro de rotación a la circunferencia en la cual se puede considerar concentrada la masa total del cuerpo sin cambiar su momento de inercia. De acuerdo con esta definición, el momento de inercia se calcula a partir de la fórmula,

$$I = mk^2$$

donde $m$ representa la masa total del cuerpo que gira y $k$ es su radio de giro.




*Momentos de inercia de algunos cuerpos con respecto a sus ejes indicados.*

**Ejercicios. Momento de inercia**

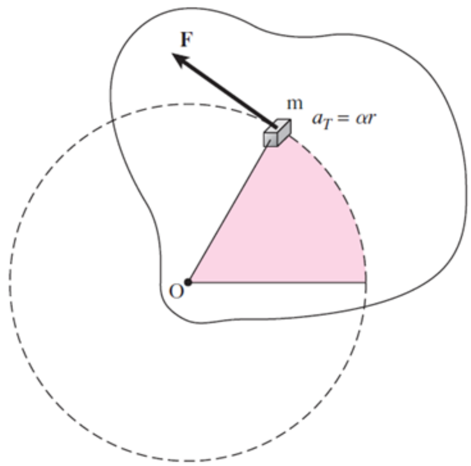
1. Una masa de 2 kg y una masa de 6 kg están unidas por una barra ligera de 30 cm. Se hace girar el sistema horizontalmente a 300 rpm en torno a un eje localizado a 10 cm de la masa de 6 kg. ¿Cuál es el momento de inercia en torno de este eje? ¿Cuál es la energía cinética rotacional? Resp. 0.140 kg m2, 69.1 J
2. La rueda de una bicicleta pesa 1.2 kg y tiene 70 cm de radio; además, tiene rayos cuyo peso es insignificante. Si parte del estado de reposo y recibe una aceleración angular de 3 rad/s$^2$, ¿cuál será su energía cinética rotacional después de 4 s? Resp. 42.3 J
3. ¿Cuál deberá ser el radio de un disco circular de 4 kg si se requiere que su momento de inercia sea igual al de una varilla de 1 kg de peso y 1 m de longitud que oscila apoyada en su punto medio? Resp. $R$ = 0.204 m

**Cuestionario. Momento de inercia**

1. ¿Qué es el momento de inercia?
2. ¿A qué corresponde el momento de inercia en el movimiento traslacional?
3. ¿Qué cuerpo gira con mayor facilidad: una esfera sólida o una esfera hueca? ¿Por qué?

**La segunda ley de Newton para el movimiento de rotación**

Suponga que analizamos el movimiento de rotación de un cuerpo rígido en la figura.
Considere a una fuerza **F** que actúa sobre la pequeña masa *m*, indicada por la porción sombreada del objeto, a una distancia *r* del eje de rotación.




*La segunda ley de Newton para el movimiento de rotación establece la relación entre el momento de torsión $Fr$ y la aceleración angular $\alpha$.*

La fuerza **F** aplicada en forma perpendicular a *r* hace que el cuerpo gire con una aceleración tangencial:

$$a_T = \alpha r$$

donde a es la aceleración angular. Partiendo de la segunda ley de Newton del movimiento,

$$F = m\, a_T = m\, \alpha\, r$$

Al multiplicar ambos lados de esta relación por *r* queda

$$Fr = (m\, r^2)\, \alpha$$

La cantidad $Fr$ se reconoce como el momento de torsión producido por la fuerza **F** con respecto al eje de rotación. Por lo tanto, para la masa *m* escribimos

$$\tau = (mr^2)\, \alpha$$

Se puede deducir una ecuación similar para todas las demás porciones del objeto que gira.
Sin embargo, la aceleración angular será constante para cada porción independientemente de su masa o de su distancia al eje. Por consiguiente, el momento de torsión resultante en todo el cuerpo es

$$\tau = \left(\sum mr^2\right)\alpha$$

o bien,

$$\tau = I\, \alpha$$

*Momento de torsión = momento de inercia* x *aceleración angular*

Observe la similitud de la ecuación con la segunda ley del movimiento rectilíneo, $F = ma$. La ley del movimiento rotacional de Newton se enuncia como sigue:

*Un momento de torsión resultante aplicado a un cuerpo rígido siempre genera una aceleración angular que es directamente proporcional al momento de torsión aplicado e inversamente proporcional al momento de inercia del cuerpo*.

Al aplicar la ecuación, es importante recordar que el momento de torsión producido por una fuerza es igual al producto de su distancia al eje por la componente perpendicular de la fuerza. También debe recordarse que la aceleración angular se expresa en radianes por segundo por segundo.

**Ejemplo**
Un disco de esmeril de radio 0.6 m y 90 kg de masa gira a 460 rpm. ¿Qué fuerza de fricción, aplicada en forma tangencial al borde, hará que el disco se detenga en 20 s?

La inercia rotacional de un disco es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(90\text{ kg})(0.60\text{ m})^2 = 16.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Al convertir 460 rpm a unidades de rad/s, la velocidad angular inicial se escribe como

$$\omega_0 = \left(460\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right); \qquad \omega_0 = 48.2\text{ rad/s}$$

Observe que $\omega_f = 0$ y $t = 20$ s, es posible hallar la aceleración angular $\alpha$.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{0 - (48.2\text{ rad/s})}{20\text{ s}} = -2.41\text{ rad/s}^2$$

A partir de la segunda ley de Newton, recordemos que el momento de torsión resultante ($\tau = FR$), debe ser igual al producto de la inercia rotacional y la aceleración angular ($\tau = I\alpha$). Por tanto,

$$FR = I\alpha \qquad \text{o} \qquad F = \frac{I\alpha}{R}$$

$$F = \frac{(16.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(-2.41\text{ rad/s}^2)}{0.60\text{ m}} = -65.0\text{ N}$$

El signo negativo aparece debido a que la fuerza debe tener una dirección opuesta a la dirección de rotación del disco.

**Ejercicios. La segunda ley de Newton para el movimiento de rotación**

1. Una cuerda que está enrollada en un carrete circular de 5 kg permite arrastrar objetos con una tensión de 400 N. Si el radio del carrete es de 20 cm y puede girar libremente sobre su eje central, ¿cuál es la aceleración angular? Resp. 800 rad/$s^2$
2. Una varilla delgada de 3 kg tiene 40 cm de longitud y oscila sobre su punto medio. ¿Qué momento de torsión se requiere para que la varilla describa 20 revoluciones al tiempo que su rapidez de rotación se incrementa de 200 a 600 rev/min? Resp. 0.558 N m
3. Una rueda grande de turbina pesa 120 kg y tiene un radio de giro de 1 m. Un momento de torsión friccional de 80 N · m se opone a la rotación del eje. ¿Qué momento de torsión se deberá aplicar para acelerar la rueda desde el reposo hasta 300 rev/min en 10 s? Resp. $\tau$ = 1885 N m
4. Una masa de 2 kg se balancea en el extremo de una varilla ligera, describiendo un círculo de 50 cm de radio. ¿Qué momento de torsión resultante se requiere para impartir a esa masa una aceleración angular de 2.5 rad/$s^2$? Resp. 1.25 N m
5. Una cuerda está enrollada con varias vueltas en un cilindro de 0.2 m de radio y 30 kg de masa. ¿Cuál es la aceleración angular del cilindro si la cuerda tiene una tensión de 40 N y gira sin fricción alguna? Resp. $\alpha$ = 13.3 rad/$s^2$
6. Un disco rectificador de 8 kg tiene 60 cm de diámetro y gira a 600 rev/min. ¿Qué fuerza de frenado se deberá aplicar tangencialmente al disco para detener su movimiento de rotación en 5 s? Resp. 15.1 N

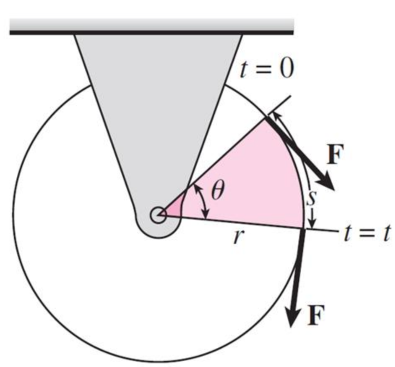
**Cuestionario. La segunda ley de Newton para el movimiento de rotación**

1. Describe la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación
2. ¿A qué corresponde el momento de torsión en el movimiento traslacional?
3. ¿Cómo influye el momento de inercia de un cuerpo en la aceleración angular?

**Trabajo y potencia rotacionales**

El trabajo se define como el producto de un desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Consideremos el trabajo realizado en el desplazamiento rotacional bajo la influencia de un momento de torsión resultante.
Considere la fuerza F que actúa al borde de una polea de radio $r$, como muestra la figura. El efecto de dicha fuerza es hacer girar la polea a través de un ángulo $\theta$ mientras el punto en el que se aplica la fuerza se mueve una distancia $s$. La longitud de arco s se relaciona con $\theta$ mediante

$$s = r\,\theta$$




*Trabajo y potencia en el movimiento de rotación.*

Así, el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ es por definición

$$Trabajo = F\,s = F\,r\,\theta$$

pero $Fr$ es el momento de torsión debido a la fuerza, por lo que obtenemos

$$Trabajo = \tau\,\theta$$

El ángulo $\theta$ debe expresarse en radianes en cualquier sistema de unidades de modo que el trabajo pueda expresarse en libras-pie o joules.

La energía mecánica generalmente se transmite en la forma de trabajo rotacional. Cuando hablamos de la potencia de salida que desarrollan las máquinas, lo que nos interesa es la razón de cambio con que se realiza el trabajo rotacional. Por tanto, la potencia rotacional puede determinarse dividiendo ambos lados de la ecuación entre el tiempo $t$ requerido para que el momento de torsión $\tau$ lleve a cabo un desplazamiento $\theta$:

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{\tau\theta}{t}$$

Puesto que $\theta/\tau$ representa la velocidad angular media $\overline{\omega}$, escribimos

$$\text{Potencia} = \tau\,\overline{\omega}$$

Observe la similitud entre esta relación y su análoga, $P = Fv$, obtenida anteriormente para el movimiento rectilíneo. Ambas medidas son una potencia media.

**Ejemplo**

Una rueda de 60 cm de radio tiene un momento de inercia de 5 kg.m$^2$. Se aplica una fuerza constante de 60 N tangente al borde de la misma. Suponiendo que parte del reposo, ¿qué trabajo se realiza en 4 s y qué potencia se desarrolla?

Dados: R = 0.60 m, F = 60 N, I = 5 kg.m$^2$, t = 4 s Encuentre: trabajo y potencia

El momento de torsión aplicado al borde de la rueda es

$$\tau = FR = (60\text{ N})\,(0.60\text{ m}) = 36.0\text{ N m}$$

Enseguida, determinamos $\alpha$ a partir de la segunda ley de Newton ($\tau = I\alpha$).

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{36\text{ N}\cdot\text{m}}{5\text{ kg}\cdot\text{m}^2}; \qquad \alpha = 7.20\text{ rad/s}^2$$

El desplazamiento angular $\theta$ es

$$\begin{aligned}\theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}(7.20\text{ rad/s}^2)(4\text{ s})^2 = 57.6\text{ rad}\end{aligned}$$

El trabajo es, por tanto,

$$\text{Trabajo} = \tau\,\theta = (36 \text{ N.m})\ (57.6 \text{ rad}) = 2\,070 \text{ J}$$

Por último, la potencia media es el trabajo por unidad de tiempo, o

$$P = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{2\,070 \text{ J}}{4 \text{ s}}; \qquad P = 518 \text{ W}$$

El mismo resultado podría encontrarse si se calcula la velocidad angular media $\omega$ y se usa la ecuación respectiva. Como ejemplo adicional, podríamos decir que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía rotacional.

**Ejercicios. Trabajo rotacional y potencia**

1. Una cuerda enrollada en un disco de 3 kg y 20 cm de diámetro recibe una fuerza de tracción de 40 N quela desplaza una distancia lineal de 5 m. ¿Cuál es el trabajo lineal realizado por la fuerza de 40 N? ¿Cuál es el trabajo rotacional realizado sobre el disco? Resp. 200 J, 200 J
2. Aplique el teorema del trabajo y la energía para calcular la velocidad angular final del disco, si éste parte del estado de reposo en el problema 1. Resp. $\omega_f$ = 163 rad/s
3. Un motor de 1.2 kW impulsa durante 8 s una rueda cuyo momento de inercia es 2 kg · m$^2$. Suponiendo que la rueda estaba inicialmente en reposo, ¿cuál es su rapidez angular final? Resp. 98.0 rad/s
4. Un cordón está enrollado en el borde de un cilindro que tiene 10 kg de masa y 30 cm de radio. Si se tira del cordón con una fuerza de 60 N, ¿cuál es la aceleración angular del cilindro? ¿Cuál es la aceleración lineal del cordón? Resp. $\alpha$ = 40 rad/s$^2$
5. Un motor de 600 W impulsa una polea con una velocidad angular media de 20 rad/s. ¿Cuál es el momento de torsión así obtenido? Resp. 30 N m

**Cuestionario. Trabajo rotacional y potencia**

1. ¿Qué es el trabajo rotacional?
2. ¿Qué es la potencia rotacional?
3. Menciona un ejemplo práctico donde se considere la potencia rotacional.

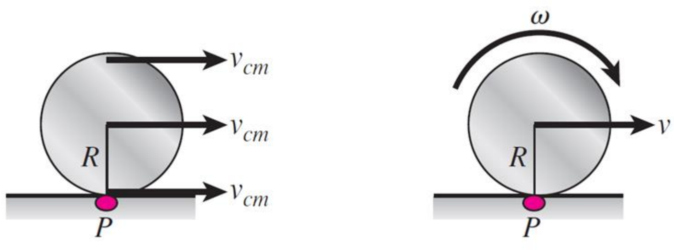
**Rotación y traslación combinadas**

Para comprender la relación entre el movimiento rectilíneo y angular de un objeto que rota, primero considere que un disco circular de radio $R$ se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rotación ni fricción. Como se muestra en la figura a, cualquier pieza de este disco viajará a una velocidad igual a la del centro de la masa.
Ahora bien, suponga que el mismo disco rota libremente sin deslizarse por la misma superficie, como en la figura b. Se requiere más energía para mantener la misma rapidez horizontal, ya que ahora además de rotación hay traslación. Como no hay deslizamiento, el centro de la masa del disco está rotando en relación al punto de contacto $P$ con la misma velocidad angular que la del disco que está rotando. Así, podemos escribir una relación familiar entre la velocidad tangencial $v$ del centro de la masa del disco y su rapidez rotacional $\omega$.

$$v = \omega R \qquad \text{o} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

Al trabajar con problemas que involucran tanto la rotación como la traslación, debemos recordar sumar la energía cinética rotacional $K_R$ a la energía cinética trasnacional $K_T$. Por ejemplo, al aplicar el principio de conservación de la energía total, sabemos que el total de todos los tipos de energía antes de un suceso debe ser igual al total después del suceso más cualquier pérdida debida a la fricción o a otras fuerzas disipativas.

$$(U_0 + K_{T0} + K_{R0}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf}) + |\text{Pérdidas}|$$




(a) (b)

*(a) Todas las partes de un disco en traslación pura se mueven con la velocidad $v_{cm}$ del centro de masa.*
*(b) Un objeto rodando es una combinación de traslación y rotación de tal forma que la velocidad lineal horizontal está dada por $v = \omega R$.*

Los subíndices 0 y $f$ se refieren a los valores inicial y final de la energía potencial $U$, la energía cinética rotacional $K_R$ y la energía cinética trasnacional $K_T$. El término "pérdidas" puede establecerse como 0 si suponemos que el movimiento es sin fricción.

**Ejemplo**
Un aro y un disco circular tienen cada uno una masa de 2 kg y un radio 10 cm. Se dejan caer rodando desde el reposo a una altura de 20 m a la parte inferior de un plano inclinado, como se muestra en la figura. Compare sus rapideces finales.

En cada caso, $U = mgh$; $K_R = ½\, mv^2$, y $K_T = ½\, I\omega^2$. La conservación de la energía sin pérdidas de la fricción da

$$(U_0 + K_{T0} + K_{R0}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf})$$
$$mgh_0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para el aro: $I = mR^2$, así que al sustituir se obtiene

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(m\cancel{R^2})\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$
$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Al simplificar y resolver para $v$, obtenemos

$$v = \sqrt{gh_0} = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} \qquad \text{o} \qquad v = 14.0\text{ m/s}$$

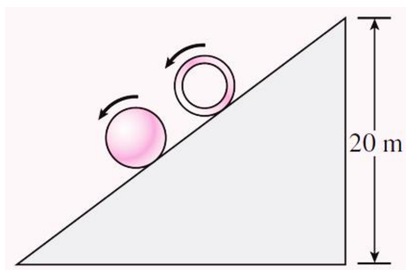
*Para el disco*: $I = \frac{1}{2}mR^2$, y

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\cancel{R^2}\right)\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$

Esto puede resolverse para obtener

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh_0} = \sqrt{\frac{4}{3}(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} \qquad \text{o} \qquad v = 16.2\text{ m/s}$$

Observe que aun cuando las masas y los radios son los mismos, el disco tiene una inercia rotacional inferior que da como resultado una rapidez final mayor. Llegará primero a la parte inferior que el anillo.




**Ejercicios. Rotación y traslación combinadas**

1. Un cilindro de 2 kg tiene un radio de 20 cm. Rueda sin deslizarse a lo largo de una superficie horizontala una velocidad de 112 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética trasnacional? (b) ¿Cuál es su energía cinética rotacional? (c) ¿Cuál es la energía cinética total? Resp. (a) 144 J; (b) 72 J; (c) 216 J
2. Un aro circular tiene la misma masa y radio que el cilindro del problema 1. ¿Cuál es la energía cinética total si rueda con la misma velocidad horizontal? Resp.
3. Considere un plano inclinado de 16 m de altura. Cuatro objetos de diferentes materiales tienen la misma masa de 3 kg: Un aro circular, un disco, una esfera y una caja. Suponga que la fricción es insignificante para la caja, pero hay suficiente fricción para que los objetos rodantes rueden sin deslizarse. Al calcular las velocidades finales en cada caso, determine el orden en el cual llegan al punto más bajo del plano. Resp. $v_c$ = 17.7 m/s; $v_e$ = 14.97 m/s; $v_d$ = 14.46 m/s; $v_a$ = 12.5 m/s
4. ¿Qué altura debe tener un plano inclinado para que un disco circular ruede desde una posición en reposo hasta el punto más bajo del plano con una velocidad final de 20 m/s? Resp.

**Cuestionario. Rotación y traslación combinadas**

1. ¿Qué energías se consideran en el análisis del movimiento de un cuerpo que rueda sobre un plano inclinado?
2. ¿Por qué no llegan al mismo tiempo a la base de un plano inclinado, un aro y un disco sólido que ruedan libremente sobre este?

**Cantidad de movimiento angular**

Considere una partícula de masa $m$ que se mueve en un círculo de radio $r$, como muestra la figura a. Si su velocidad tangencial es $v$, tendrá una cantidad de movimiento rectilíneo $p = mv$. Con respecto al eje de rotación fijado, definimos la cantidad de movimiento angular $L$ de la partícula como el producto de su cantidad de movimiento rectilíneo por la distancia perpendicular que va del eje a la partícula que gira.

$$L = mvr$$

Ahora consideremos la definición de la cantidad de movimiento angular cuando ésta se aplica a un cuerpo rígido extenso. La figura b describe este tipo de cuerpo, el cual gira alrededor de su eje $O$. Cada partícula del cuerpo tiene una cantidad de movimiento angular dado por la ecuación $L = mvr$. Sustituyendo $v = \omega r$, cada partícula tiene una cantidad de movimiento angular dada por

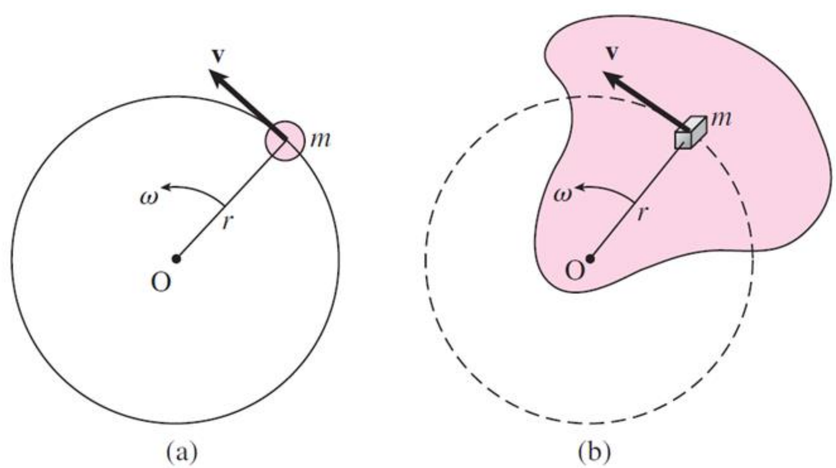
$$mvr = m(\omega r)r = (mr^2)\omega$$

Puesto que el cuerpo es rígido, todas las partículas que lo forman tienen la misma velocidad angular, y la cantidad de movimiento angular del cuerpo es

$$L = \left(\sum mr^2\right)\omega$$

Por tanto, la cantidad de movimiento angular total es igual al producto de la velocidad angular del cuerpo por su momento de inercia:

$$L = I\omega$$




*Definición de la cantidad de movimiento angular.*

**Ejemplo**
Una varilla uniforme delgada mide 1 m de longitud y tiene una masa de 6 kg. Si la varilla se hace girar en su centro y se queda en rotación con una velocidad angular de 16 rad/s, calcule su cantidad de movimiento angular.

$$I = \frac{ml^2}{12} = \frac{(6\text{ kg})(1\text{ m})^2}{12} = 0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Entonces, su cantidad de movimiento angular es

$$L = I\omega = (0.5 \text{ kg.m}^2)\ (16 \text{ rad/s}) = 8 \text{ kg.m}^2\text{/s}$$

**Conservación de la cantidad de movimiento angular**

Podemos entender mejor la definición de movimiento si regresamos a la ecuación básica para el movimiento angular, $\tau = I\alpha$. Recuerde la ecuación que define la aceleración angular

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$\tau = I\left(\frac{\omega_f - \omega_0}{t}\right)$$

Al multiplicar por $t$, obtenemos

$$\tau t = I\ \omega_f - I\ \omega_0$$

*Impulso angular = cambio en la cantidad de movimiento angular*

El producto $\tau t$ se define como impulso angular.
Si no se aplica ningún momento de torsión externo a un cuerpo que gira, podemos establecer $\tau = 0$ en la ecuación, y obtener

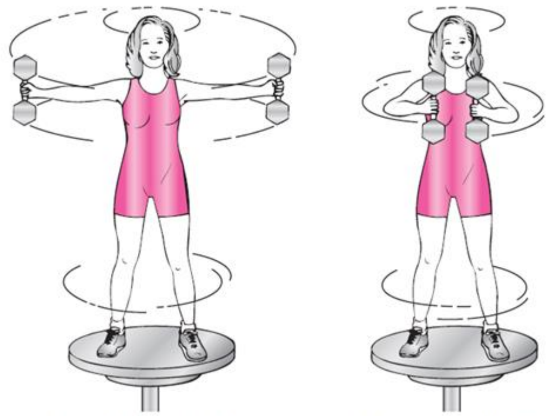
$$0 = I\omega_f - I\omega_0$$

$$I\omega_f = I\omega_0$$

*Cantidad de movimiento angular final = cantidad de movimiento angular inicial*

De esta manera, llegamos a un enunciado para expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular:
Si la suma de los momentos de torsión externos que actúan sobre un cuerpo o sistema de cuerpos es cero, la cantidad de movimiento angular permanece sin cambios.
Este enunciado resulta verdadero aun en el caso de que el cuerpo que gira no sea rígido, sino que pueda cambiar su forma de tal modo que su momento de inercia cambie. En este caso, la rapidez angular también cambia de tal modo que el producto $I\omega$ siempre es constante. Los patinadores, clavadistas y acróbatas controlan la rapidez con que giran sus cuerpos extendiendo o encogiendo sus extremidades para aumentar o disminuir su rapidez angular.

Un experimento interesante que ilustra la conservación de la cantidad de movimiento angular se muestra en la figura. Una mujer está parada sobre una plataforma giratoria y sostiene unas pesas grandes en cada mano. Al principio, empieza a girar con los brazos completamente extendidos. Al acercar las manos a su cuerpo, disminuye su momento de inercia.
Dado que la cantidad de su movimiento angular no puede cambiar notará un aumento considerable en su rapidez angular. Al extender sus brazos podrá disminuir su rapidez angular.




*Experimento para demostrar la conservación de la cantidad de movimiento angular. La mujer controla su velocidad de rotación moviendo las pesas hacia adentro para aumentar su rapidez rotacional o hacia afuera para disminuirla.*

**Ejemplo**

Suponga que la mujer que sostiene las pesas en la figura tiene una inercia rotacional de 6 kg·m$^2$ cuando las acerca a su cuerpo. Con las pesas en su posición extendida rota a 1.4 rev/s. ¿Cuál será su velocidad de rotación cuando acerca las pesas al cuerpo?

$$I_f\omega_f = I_0\omega_0 \qquad \text{o} \qquad \omega_f = \frac{I_0\omega_0}{I_f}$$

$$\omega_f = \frac{(6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(1.4\ \text{rev/s})}{(2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)} = 4.20\ \text{rev/s}$$

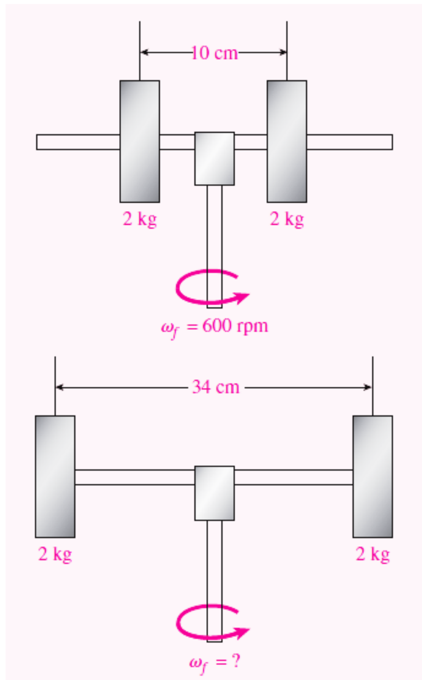
Básicamente observamos que el hecho de disminuir la inercia rotacional a un tercio provoca que la rapidez angular se triplique con el fin de conservar la cantidad de movimiento angular.

**Ejercicios. Movimiento angular**

1. Una varilla de acero de 500 g y 30 cm de longitud oscila sobre su centro y gira a 300 rev/min. ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular? Resp. 0.118 kg m/s$^2$
2. En el problema 1, ¿qué momento de torsión promedio deberá aplicarse para detener totalmente la rotación en 2 s? Resp. $\tau$ = 0.0589 N m
3. Un momento de torsión de 400 N · m se aplica repentinamente en el borde de un disco inicialmente en reposo. Si la inercia rotacional del disco es de 4 kg · m$^2$ y el momento de torsión actúa durante 0.02 s, ¿cuál será el cambio en la cantidad de movimiento angular? ¿Cuál será la rapidez angular final? Resp. 8.00 kg · m$^2$/s, 2.00 rad/s

**Ejercicios. Conservación de la cantidad de movimiento angular**

1. La varilla que conecta los dos pesos de la figura tiene un peso insignificante, pero está configurada para permitir que los pesos resbalen hacia afuera. En el instante en que la rapidez angular llega a 600 rev/min, las masas de 2 kg están separadas 10 cm. ¿Cuál será la rapidez rotacional cuando las masas estén a 34 cm de distancia una de otra? Resp. 51.9 rpm




**Cuestionario. Momento angular**

1. ¿Qué es la cantidad de movimiento angular?
2. ¿A qué corresponde la cantidad de movimiento angular en el movimiento traslacional?
3. ¿Qué es la conservación de la cantidad de movimiento angular?
4. Menciona un ejemplo donde se observe la conservación de la cantidad de movimiento angular.

## Unidad 2. Sistemas de fluidos

### Presentación

Los líquidos y los gases se conocen como fluidos porque fluyen libremente y tienden a llenar los recipientes que los contienen. En esta unidad se aprenderá que los fluidos ejercen fuerzas sobre las paredes de los recipientes donde están contenidos. Estas fuerzas actúan sobre áreas definidas y originan una condición de presión. En la prensa hidráulica se utiliza la presión del fluido para elevar cargas pesadas. La estructura de los depósitos de agua, las presas y los grandes tanques de aceite se diseñan, en gran parte, tomando en cuenta la presión. En el diseño de barcos, submarinos y globos meteorológicos se debe tomar en cuenta la presión y la densidad del fluido circundante. Se estudiarán también los aspectos fundamentales del flujo de fluidos y el principio de Bernoulli que gobiernan dicho movimiento. En la primera parte se estudian algunas propiedades de los fluidos en reposo y las leyes que los rigen; en la segunda, se abordan algunas propiedades dinámicas de los fluidos considerando la conservación de la masa y de la energía. En la tercera parte se indican los límites de validez del modelo de fluidos ideales. Las actividades a realizar serán tanto teóricas como experimentales.
El estudio y análisis de los conceptos relativos a esta unidad permiten explicar el funcionamiento de dispositivos hidráulicos y neumáticos tales como: prensa hidráulica, baumanómetro y tubo de Venturi; así como el comportamiento de diferentes tipos de fluidos y de sustentación aerodinámica.

### Propósitos:

- Al finalizar la unidad el alumno:
- Describirá algunos aspectos del comportamiento de un fluido en condiciones estáticas o dinámicas.
- Comprenderá los límites de validez de los modelos matemáticos considerados.
- Analizará situaciones donde se manifiesten: procesos de transferencia de masa, de energía y principios de conservación, preferentemente en situaciones experimentales.
- Resolverá problemas prototipo donde se presenten procesos de transferencia de masa y energía con base en los principios de conservación.

## Fluidos

Los líquidos y los gases se conocen como fluidos porque fluyen libremente y tienden a llenar los recipientes que los contienen. Los fluidos ejercen fuerzas sobre las paredes de los recipientes donde están contenidos. Esas fuerzas actúan sobre áreas definidas y originan una condición de presión. En la prensa hidráulica se utiliza la presión del fluido para elevar cargas pesadas. La estructura de los depósitos de agua, las presas y los grandes tanques de aceite se diseñan, en gran parte, tomando en cuenta la presión. En el diseño de barcos, submarinos y globos meteorológicos se debe tomar en cuenta la presión y la densidad del fluido circundante. Estudiaremos también los aspectos fundamentales del flujo de fluidos y las leyes de Bernoulli que gobiernan dicho

### Propiedades de los fluidos

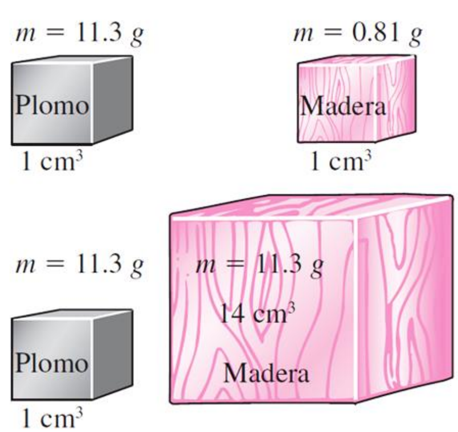
Antes de comenzar a estudiar cualquier problema de flujo, es necesario conocer algunas características y propiedades físicas de los fluidos, de vital importancia para un mejor entendimiento de su comportamiento. Densidad y presión son magnitudes que podemos relacionar a diario con líquidos y gases, pero de las que necesitamos una definición más concreta para una mejor comprensión de sus características y propiedades

### Densidad

Antes de estudiar la estática y la dinámica de fluidos, es importante entender la relación entre la masa de un cuerpo y su volumen. Podría decirse que un bloque de plomo es más pesado que un bloque de madera. Lo que en realidad queremos expresar es que un bloque de plomo es más pesado que un bloque de madera de tamaño similar. Los términos ligero y pesado son de carácter comparativo. Como se ilustra en la figura, un bloque de plomo de 1 $cm^3$ tiene una masa de 11.3 g, mientras que un bloque de roble de 1 $cm^3$ tiene una masa de sólo 0.81 g. El volumen de la madera debe ser 14 veces el volumen del plomo si éstos tienen la misma masa.
La densidad $\rho$ de un cuerpo se define como la relación de su masa con respecto a su volumen V.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad m = \rho V$$

La unidad del SI para la densidad es kilogramos por metro cúbico ($kg/m^3$). Por tanto, si un objeto tiene una masa de 4 kg y un volumen de 0.002 m3, tiene una densidad de 2000 $kg/m^3$.




*Comparación de la masa y el volumen para bloques de plomo y madera. El volumen de la madera debe ser 14 veces el del plomo si tienen la misma masa.*

Cuando trabajamos con volúmenes pequeños la densidad se expresa en gramos por centímetro cúbico (g/cm$^3$). Aun cuando no se recomienda el uso de unidades del SUEU, las unidades más viejas se siguen usando en Estados Unidos, por lo que es conveniente mencionar cuando menos el concepto de peso específico $D$. El peso específico se usa con frecuencia para las unidades más viejas de peso (lb) y longitud (ft).

## Tabla de densidades

| SUSTANCIA | DENSIDAD Kg/m$^3$ |
|---|---|
| Aceite | 920 |
| Acero | 7850 |
| Agua | 1000 |
| Agua de mar | 1027 |
| Aire | 1.3 |
| Alcohol | 780 |
| Aluminio | 2700 |
| Benceno | 900 |
| Carbono | 2260 |
| Cobre | 8960 |
| Cuerpo humano | 950 |
| Etanol | 810 |
| Gasolina | 680 |
| Glicerina | 1260 |
| Hielo | 920 |
| Hierro | 7874 |
| Madera | 900 |
| Magnesio | 1740 |
| Plomo | 11340 |
| Sangre | 1480-1600 |

**Peso específico**

El peso específico $D$ de un cuerpo se define como la relación entre su peso $W$ y su volumen $V$. La unidad común es la libra por pie cúbico (lb/ft$^3$).

$$D = \frac{W}{V} \qquad W = DV$$

Por ejemplo, el peso específico del agua es 62.4 lb/ft$^3$.

La relación entre peso específico y densidad se determina recordando que W = mg. Por consiguiente,

$$D = \frac{mg}{V} = \rho g$$

**Ejemplo**
Un tanque cilíndrico de gasolina tiene 3 m de altura y 1.2 m de diámetro. ¿Cuántos kilogramos de gasolina es capaz de almacenar el tanque?

Para calcular la masa, primero debemos determinar el volumen del cilindro circular derecho ($V = \pi r^2 h$), donde $r = \frac{1}{2} D = 0.60$ m.

El volumen es $V = \pi r^2 h = \pi (0.6 \text{ m})^2 (3 \text{ m})$; $V = 3.39 \text{ m}^3$

Al resolver la ecuación de la densidad para m tenemos

$$m = \rho V = (680 \text{ kg/m}^3)(3.39 \text{ m}^3);\ m = 2\,306 \text{ kg}$$

**Viscosidad**
Esta propiedad se origina por el rozamiento de unas partículas con otras, cuando un líquido fluye. Por tal motivo, la viscosidad se puede definir como una medida de la resistencia que opone un líquido a fluir.
Si en un recipiente perforado en el centro se hacen fluir por separado miel, leche, agua y alcohol, observamos que cada líquido fluye con rapidez distinta; mientras más viscoso es un líquido, más tiempo tarda en fluir. En la industria, la viscosidad se cuantifica en forma práctica, utilizando recipientes con una determinada capacidad, que tienen un orificio de un diámetro establecido convencionalmente. Al medir el tiempo que el líquido tarda en fluir se conoce su viscosidad, para ello se usan tablas que relacionan el tiempo de escurrimiento con la viscosidad.
La unidad de viscosidad en el Sistema Internacional es el poiseuille definido como la viscosidad que tiene un fluido cuando su movimiento rectilíneo uniforme sobre una superficie plana es retardado por una fuerza de un newton por metro cuadrado de superficie de contacto con el fluido, cuya velocidad respecto a la superficie es de un metro por segundo.

$$1 \text{ poiseuille} = \frac{1 \text{ Ns}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ kg}}{\text{m s}}$$


**Fig. 8.1** Dispositivo para comparar la viscosidad de varios líquidos, al llenar el vaso con cada uno de ellos y observar el tiempo que tardan en fluir por el orificio.

En la industria se utiliza como unidad práctica de viscosidad el centipoise que equivale a la centésima parte del poise

**Tabla de valores de viscosidad para fluidos comunes**

| Fluido | Temperatura (°C ) | Viscosidad Pa.s |
|---|---|---|
| Aire | 0 | $0.0171 \times 10^{-3}$ |
| | 20 | $0.0182 \times 10^{-3}$ |
| | 40 | $0.0193 \times 10^{-3}$ |
| Dióxido de carbono | 20 | $0.0147 \times 10^{-3}$ |
| Helio | 20 | $0.0196 \times 10^{-3}$ |
| Sangre entera | 37 | $4 \times 10^{-3}$ |
| Glicerina | 20 | $1500 \times 10^{-3}$ |
| Metanol | 20 | $0.584 \times 10^{-3}$ |
| Agua | 0 | $1.78 \times 10^{-3}$ |
| | 20 | $1 \times 10^{-3}$ |
| | 40 | $0.651 \times 10^{-3}$ |

**Tensión superficial**

La tensión superficial hace que la superficie libre de un líquido se comporte como una finísima membrana elástica. Este fenómeno se presenta debido a la atracción entre las moléculas del líquido. Cuando se coloca un líquido en un recipiente, las moléculas interiores se atraen entre sí en todas direcciones por fuerzas iguales que se contrarrestan unas con otras, pero las moléculas de la superficie libre del líquido sólo son atraídas por las inferiores y laterales más cercanas. Por tanto, la resultante de las fuerzas de atracción ejercidas por las moléculas próximas a una de la superficie se dirige hacia el interior del líquido, lo cual da origen a la tensión superficial.
Debido a la tensión superficial una pequeña masa de líquido tiende a ser redonda en el aire, tal es el caso de las gotas; los insectos pueden caminar sobre el agua, o una aguja puesta con cuidado en forma horizontal sobre un líquido no se hunde.
La tensión superficial del agua puede reducirse en forma considerable si se le agrega detergente, esto contribuye a que el agua jabonosa penetre con más facilidad por los tejidos de la ropa durante el lavado.

**Tabla de tensión superficial de diversos líquidos**

| Líquido | Temp. °C | Tensión superficial N/m |
|---|---|---|
| Alcohol etílico | 20 | 0.022 |
| Mercurio | 20 | 0.465 |
| Agua jabonosa | 20 | 0.025 |
| Agua | 20 | 0.073 |
| Agua | 100 | 0.059 |

**Cohesión**

Es la fuerza que mantiene unidas a las moléculas de una misma sustancia. Por la fuerza de cohesión, si dos gotas de agua se juntan forman una sola; lo mismo sucede con dos gotas de mercurio.

**Adherencia**

La adherencia es la fuerza de atracción que se manifiesta entre las moléculas de dos sustancias diferentes en contacto. Comúnmente las sustancias líquidas se adhieren a los cuerpos sólidos.
Al sacar una varilla de vidrio de un recipiente con agua, está completamente mojada, esto significa que el agua se adhiere al vidrio. Pero si la varilla de vidrio se introduce en un recipiente con mercurio, al sacarla se observa completamente seca, lo cual indica que no hay adherencia entre el mercurio y el vidrio.

En general, cuando el fenómeno de adherencia se presenta, significa que la fuerza de cohesión entre las moléculas de una misma sustancia es menor a la fuerza de adherencia que experimenta al contacto con otra. Tal es el caso del agua adherida al vidrio, la pintura al adherirse a un muro, el aceite al papel, o la tinta a un cuaderno. Si la fuerza de cohesión entre las moléculas de una sustancia es mayor que la fuerza de adherencia que experimenta al contacto con otra, no se presenta adherencia y se dice que el líquido no moja al sólido.

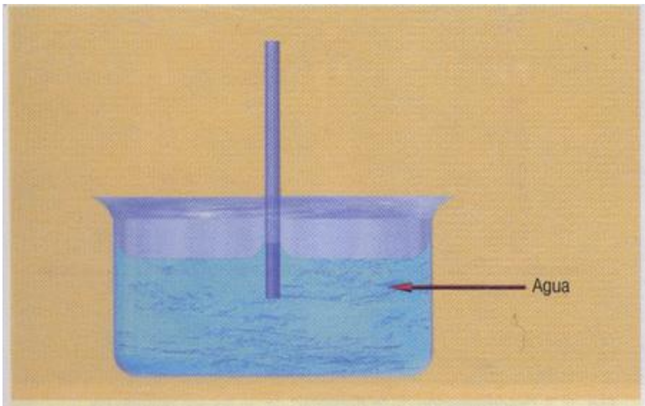



**Fig. 8.3** El agua moja a la varilla de vidrio debido a que es mayor la fuerza de adherencia que la de cohesión.

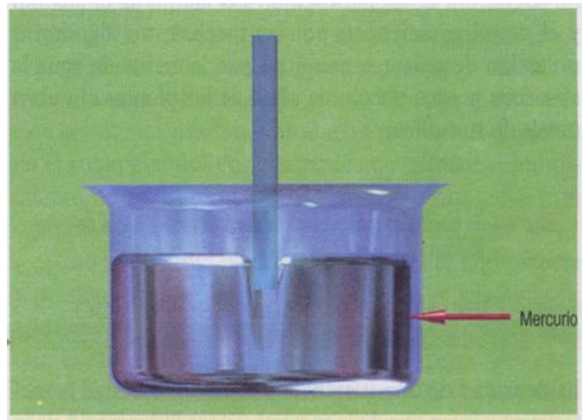



**Fig. 8.4** El mercurio no moja a la varilla de vidrio debido a que es menor la fuerza de adherencia que la de cohesión.

**Capilaridad**

La capilaridad se presenta cuando existe contacto entre un líquido y una pared sólida, especialmente si son tubos muy delgados (casi del diámetro de un cabello) llamados capilares.

Al introducir un tubo de diámetro muy pequeño en un recipiente con agua se observa que el líquido asciende por el tubo alcanzando una altura mayor que la de la superficie libre del líquido. La superficie del líquido contenido en el tubo no es plana, sino que forma un menisco cóncavo.

Si se introduce un tubo Capilar en un recipiente Con mercurio, se observa que el líquido desciende debido a una depresión. En este caso se forma un menisco convexo (FIG.8.6).

Debido a la capilaridad, en las lámparas el alcohol y el petróleo ascienden por las mechas; un algodón o un terrón de azúcar sumergidos parcialmente en agua la absorben poco a poco, y la savia de las plantas circula a través de sus tallos.

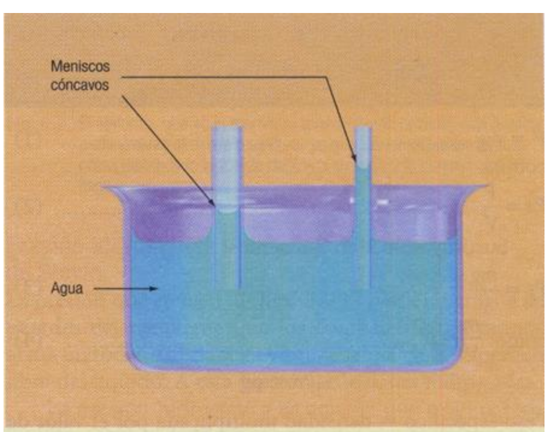



**Fig. 8.5** Formación de meniscos cóncavos al introducir tubos delgados en agua.

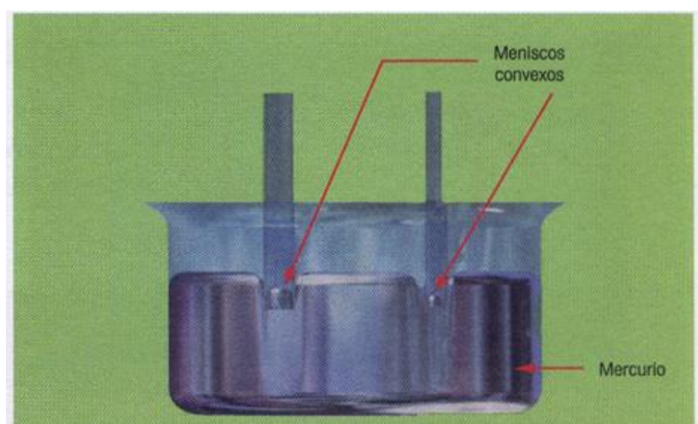



Fig. 8.6

**Ejercicios. Propiedades de los fluidos**

1. ¿Qué volumen ocupan 0.4 kg de alcohol? ¿Cuál es el peso de este volumen? Resp. 5.06 x $10^{-4}$ $m^3$, 3.92 N
2. ¿Qué volumen de agua tiene la misma masa que 100 $cm^3$ de plomo? ¿Cuál es el peso específico del plomo? Resp. 1130 $cm^3$, 1.11 x $10^5$ $N/m^3$
3. 0.5 Kg de alcohol etílico ocupan un volumen de 633 mililitros. Calcular: a) su densidad, b) su peso específico.
4. Calcular la masa y el peso de 15 000 litros de gasolina cuya densidad absoluta es de 700 $kg/m^3$.
5. ¿Cuál es la densidad del aceite cuyo peso específico es de 8967 $N/m^3$?
6. ¿Cuál es el volumen, en $m^3$ y en litros de 3000 N de aceite de oliva, cuyo peso específico es de 9016 $N/m^3$?

**Presión**

La eficiencia de una cierta fuerza a menudo depende del área sobre la que actúa. Por ejemplo, una mujer que usa tacones puntiagudos daña más los pisos que si usara tacones anchos. Aun cuando la dama ejerce la misma fuerza hacia abajo en ambos casos, con los tacones agudos su peso se reparte sobre un área mucho menor. A la fuerza normal por unidad de área se le llama presión. Simbólicamente, la presión $P$ está dada por

$$P = \frac{F}{A}$$

Donde, A es el área donde se aplica la fuerza perpendicular $F$. La unidad de presión resulta de la relación entre cualquier unidad de fuerza y la unidad de área. Por ejemplo, newtons por metro cuadrado y libras por pulgada cuadrada. En el sistema SI de unidades, al $N/m^2$ se le llama pascal (Pa).

1 pascal (Pa) = 1 newton por metro cuadrado ($N/m^2$)

Cuando se informa la presión, el kilopascal (kPa) es la unidad de medida más apropiada para la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo, sólo el Pa debe sustituirse en las fórmulas.

$$1 \text{ kPa} = 1\,000 \text{ N/m}^2 = 0.145 \text{ lb/in}^2$$

**Ejemplo**

Un zapato de golf tiene 10 tacos, cada uno con un área de 6.5x$10^{-6}$ $m^2$ en contacto con el piso. Suponga que, al caminar, hay un instante en que los 10 tacos soportan el peso completo de una persona de 80 kg. ¿Cuál es la presión ejercida por los tacos sobre el suelo?

Calcularemos la fuerza total sobre el suelo al determinar el peso de una masa de 80 kg. Luego, dividiremos esa fuerza entre el área de 10 tacos para obtener la presión total.

El área total es 10 (6.5x$10^{-6}$ $m^2$) o 65x$10^{-6}$ $m^2$. Por tanto, la presión es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$$
$$= \frac{(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{65.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.21 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

Recuerde que un $N/m^2$ es un pascal (Pa), podemos escribir la presión total como

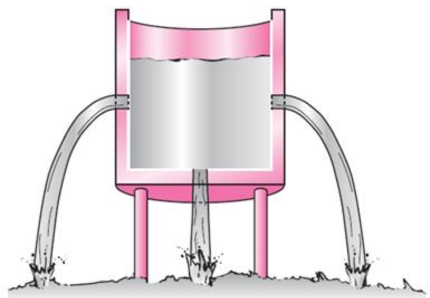
$$P = 1.21 \text{ x } 10^7 \text{ Pa} = 12.1 \text{ MPa}$$

## Presión del fluido

Es importante la diferencia entre cómo actúa la fuerza sobre un fluido y cómo lo hace sobre un sólido. Puesto que el sólido es un cuerpo rígido, puede soportar que se le aplique una fuerza sin que cambie apreciablemente su forma. Por otra parte, un líquido puede soportar una fuerza únicamente en una superficie o frontera cerrada. Si el fluido no está restringido en su movimiento, empezará a fluir bajo el efecto del esfuerzo cortante, en lugar de deformarse elásticamente.

La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene siempre actúa en forma perpendicular a esas paredes.

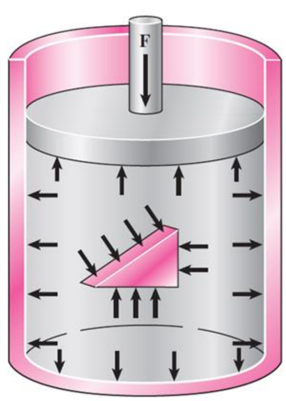
Ésta es una característica propia de los fluidos que hace que el concepto de presión sea muy útil. Si se perforan agujeros a los lados y al fondo de un barril con agua, se demuestra que la fuerza ejercida por el agua es en cualquier parte perpendicular a la superficie del barril.



*Las fuerzas ejercidas por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene son perpendiculares en todos los puntos.*

Al reflexionar un momento se deduce que el líquido también ejerce una presión hacia arriba. Cualquier persona que haya tratado de mantener una balsa por debajo de la superficie del agua se convence de inmediato de la existencia de una presión hacia arriba. En realidad, nos damos cuenta de que Los fluidos ejercen presión en todas direcciones.

La figura muestra un líquido bajo presión. Las fuerzas actúan sobre la cara del émbolo, sobre las paredes del recipiente y sobre las superficies del objeto suspendido, como se aprecia en la figura siguiente.




*Los fluidos ejercen presión en todas direcciones.*

De igual manera que los volúmenes más grandes de objetos sólidos ejercen fuerzas mayores contra el lugar que los soporta, los fluidos ejercen mayor presión al aumentar la profundidad.
El fluido en el fondo de un recipiente siempre está sometido a una presión mayor que la que experimenta cerca de la superficie. Esto se debe al peso del líquido que se encuentra arriba. Sin embargo, es preciso señalar una diferencia entre la presión ejercida por los sólidos y la que se produce en el caso de los líquidos. Un objeto sólido puede ejercer únicamente una fuerza hacia abajo debido a su peso. A cualquier profundidad en un fluido la presión es la misma en todas direcciones. Si esto no fuera cierto, el fluido podría fluir bajo la influencia de una presión resultante hasta que se alcanzara una nueva condición de equilibrio.
Puesto que el peso del fluido que está por arriba de un punto en cuestión es proporcional a su densidad, la presión a cualquier profundidad es también proporcional a la densidad del fluido. Esto puede visualizarse considerando una columna rectangular de agua cuyas dimensiones van desde la superficie hasta la profundidad $h$, como se muestra en la figura siguiente. El peso de la columna completa actúa sobre el área A en el fondo de la columna.
Partiendo de la ecuación $m = \rho V$, podemos escribir el peso de la columna como

$$W = DV = DAh$$

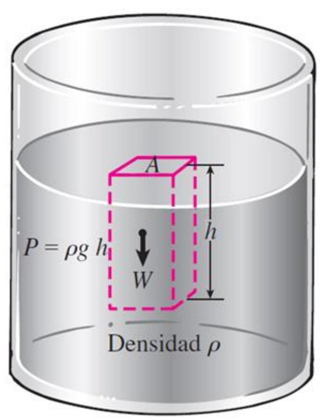
donde D es el peso específico del fluido. La presión (peso por unidad de área) a la profundidad h está dada por

$$P = \frac{W}{A} = Dh$$

o bien, en términos de densidad,

$$P = Dh = \rho g h \qquad (15.5)$$

La presión del fluido en cualquier punto es directamente proporcional a la densidad del fluido y a la profundidad bajo la superficie del fluido.




*Relación entre presión, densidad y profundidad.*

**Ejemplo**

La presión del agua en una casa es de 160 lb/in$^2$ ¿A qué altura debe estar el nivel del agua del recipiente de almacenamiento por encima de la toma de agua de la casa?

A partir de las tablas calculamos que el peso específico $D$ del agua es 62.4 lb/ft$^3$. La presión dada en la casa es 160 lb/in$^2$, por tanto debemos convertir a lb/ft$^2$ para obtener las unidades correspondientes. Luego aplicamos la ecuación $P = Dh = \rho gh$ para resolver la altura $h$.

Al convertir las unidades tenemos

$$P = \left(160\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right)\left(\frac{144\ \text{in}^2}{1\ \text{ft}^2}\right) = 23\,040\ \text{lb/ft}^2$$

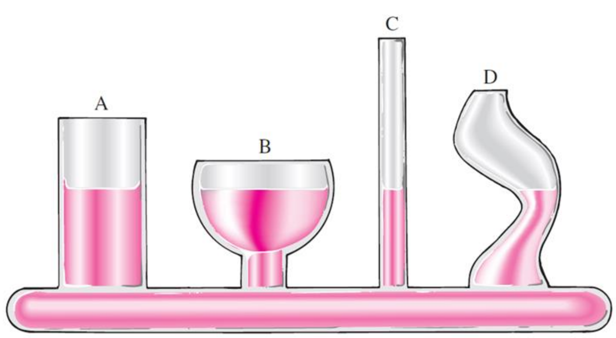
Ahora al resolver para $h$ en la ecuación $P = Dh = \rho gh$ obtenemos

$$h = \frac{P}{D} = \frac{23\,040\ \text{lb/ft}^2}{62.4\ \text{lb/ft}^3}; \qquad h = 369\ \text{ft}$$

En el ejemplo anterior no se mencionó la forma o el tamaño del tanque de almacenamiento del agua. Tampoco se dio información acerca de la trayectoria que sigue el agua o el tamaño de las tuberías que conectan el tanque con la toma de la casa. ¿Debemos suponer que nuestra respuesta es correcta cuando se fundamenta tan sólo en la diferencia de niveles del agua? ¿No tienen algún efecto la forma o el área del depósito sobre la presión del líquido?

Para responder estas preguntas, debemos recordar algunas de las características ya estudiadas acerca de los fluidos.

Considere una serie de recipientes que se comunican entre sí y que tienen diferentes áreas y formas interconectadas, como muestra la figura siguiente. Parecería a primera vista que el mayor volumen contenido en el recipiente A ejercería mayor presión en el fondo que el recipiente D.



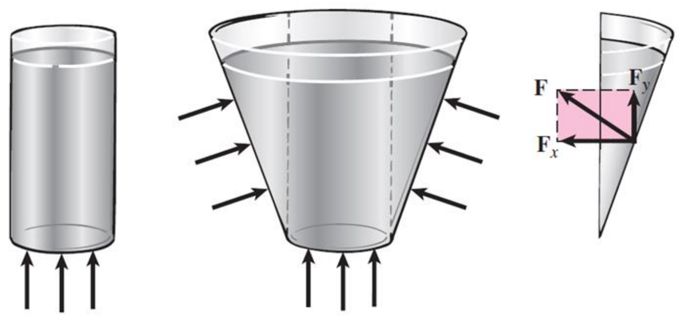

*El agua siempre busca su propio nivel, lo cual indica que la presión es independiente del área o de la forma del recipiente.*

El efecto de tal diferencia de presión forzaría al líquido a elevarse más en el recipiente D. Sin embargo, si se llenan los recipientes con líquido se demuestra que los niveles son iguales en todos los recipientes.

Parte del problema de entender esta paradoja proviene de la confusión de los términos presión y fuerza total. Como la presión se mide en términos de la unidad de área, no consideramos el área total cuando se resuelven problemas que incluyen a la presión. Por ejemplo, en el recipiente A el área del líquido en el fondo del recipiente es mucho mayor que el área del fondo del recipiente D. Esto significa que el líquido en el recipiente A ejercerá una fuerza total mayor en el fondo que el líquido del recipiente D. Pero la fuerza más grande se aplica sobre un área mayor, por lo que la presión es la misma en ambos recipientes.

Si el fondo de los recipientes B, C y D tuvieran la misma área podríamos decir que las fuerzas totales también son iguales en el fondo de estos recipientes. (Por supuesto, las presiones son iguales a cualquier profundidad.) Se puede preguntar por qué las fuerzas totales pueden ser iguales cuando los recipientes B y C contienen un mayor volumen de agua. El agua adicional en cada caso se apoya mediante componentes verticales de las fuerzas ejercidas

por las paredes del recipiente sobre el fluido (véase la figura siguiente. Cuando las paredes del recipiente son verticales, las fuerzas que actúan sobre los lados no tienen componentes hacia arriba. Por tanto, la fuerza total al fondo de un recipiente es igual al peso de una columna recta de agua sobre el área de la base.




La presión en el fondo de cada recipiente sólo es función de la profundidad del líquido y es la misma en todas direcciones. Puesto que el área en el fondo es la misma en ambos recipientes, la fuerza total ejercida sobre el fondo de cada uno de ellos es también igual.

**Ejemplo**

Suponga que los recipientes de la figura se llenan con gasolina hasta que el nivel del fluido es de 20 cm por arriba de la base de cada recipiente. Las áreas de las bases de los recipientes A y B son de 20 cm$^2$ y de 10 cm$^2$, respectivamente. Compare la presión y la fuerza total sobre la base de cada recipiente.

La densidad de la gasolina se proporciona en la tabla. La presión es la misma en la base para cualquier contenedor y está dada por $\rho g h$. No obstante, la fuerza total no es la misma ya que el peso del agua por encima de la base es diferente. La fuerza total se define como el producto de la presión por el área.

La presión de la base de cualquier contenedor es

$$P = \rho g h = (680\ \mathrm{kg/m^3})\ (9.8\ \mathrm{m/s^2})\ (0.20\ \mathrm{m});\ \mathrm{P} = 1330\mathrm{Pa}$$

Necesitamos convertir las áreas de cm$^2$ a m$^2$, recuerde que 1 cm$^2$ = 1 X 10$^{-4}$ m$^2$. Por tanto, la presión de determina al resolver para la fuerza en la ecuación $P = F/A$.

$$F = PA = (1330\ \mathrm{Pa})\ (20 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 2.66\ \mathrm{N}$$

$$F = PA = (1330\ \mathrm{Pa})\ (10 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 1.33\ \mathrm{N}$$

**Medición de la presión**

La presión que se estudió en la sección previa se debe únicamente al propio fluido y puede calcularse a partir de la ecuación $P = F/A$. Desafortunadamente, este caso no es el más frecuente.

Cualquier líquido en un recipiente abierto, por ejemplo, está sujeto a la presión atmosférica además de la presión debida a su propio peso. Puesto que el líquido es relativamente incompresible, la presión externa de la atmósfera se trasmite por igual a todo el volumen del líquido. El primero en enunciar este hecho fue el matemático francés Blas Pascal (1623-1662), y se conoce como ley de Pascal. En general, se enuncia como sigue:

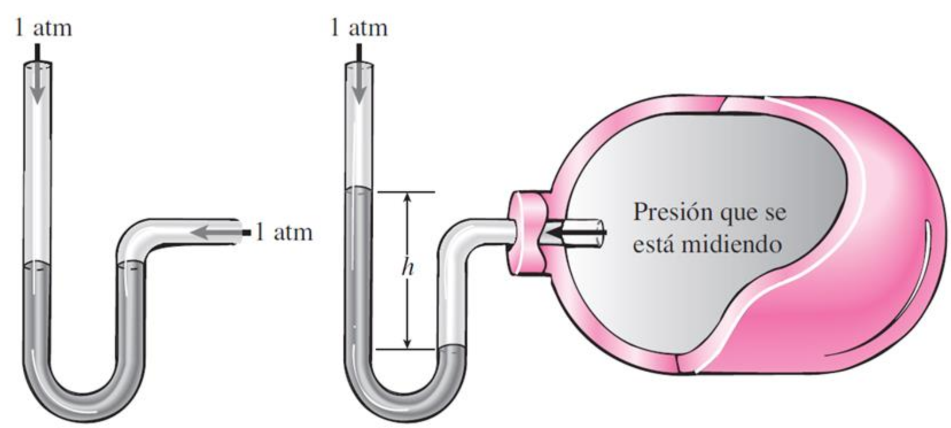
Una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite uniformemente a través del volumen del líquido.

La mayoría de los dispositivos que permiten medir la presión directamente miden en realidad la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica. El resultado obtenido se conoce como la presión manométrica.

***Presión absoluta = presión manométrica + presión atmosférica***

La presión atmosférica al nivel del mar es 101.3 kPa, o 14.7 lb/in$^2$. Debido a que la presión atmosférica participa en gran número de cálculos, con frecuencia se usa una unidad de presión de 1 atmósfera (atm), definida como la presión media que la atmósfera ejerce al nivel del mar, es decir, 101.3 kPa.

Un aparato muy común para medir la presión manométrica es el manómetro de tubo abierto, mostrado en la figura siguiente. El manómetro consiste en un tubo en forma de U que contiene un líquido, que generalmente es mercurio. Cuando ambos extremos del tubo están abiertos, el mercurio busca su propio nivel ya que se ejerce 1 atm de presión en cada uno de los extremos abiertos. Cuando uno de los extremos se conecta a una cámara presurizada, el mercurio se eleva en el tubo abierto hasta que las presiones se igualan. La diferencia entre los dos niveles de mercurio es una medida de la presión manométrica: la diferencia entre la presión absoluta en la cámara y la presión atmosférica en el extremo abierto. El manómetro se usa con tanta frecuencia en situaciones de laboratorio que la presión atmosférica y otras presiones se expresan a menudo en centímetros de mercurio o pulgadas de mercurio.



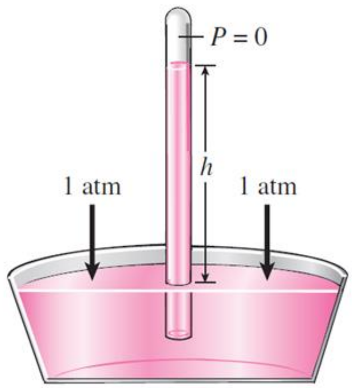

*Manómetro de tubo abierto. La presión se mide por la altura $h$ de la columna de mercurio.*

Por lo general, la presión atmosférica se mide en el laboratorio con un barómetro de mercurio.

El principio de su operación se muestra en la figura siguiente. Un tubo de vidrio, cerrado en un extremo, se llena de mercurio. El extremo abierto se tapa y el tubo se invierte en una cubeta de mercurio. Si no se tapa el extremo abierto, el mercurio fluye hacia afuera del tubo hasta que la presión ejercida por la columna de mercurio equilibra exactamente la presión atmosférica que actúa sobre el mercurio de la cubeta. Puesto que la presión en el tubo sobre la columna de mercurio es cero, la altura de la columna por arriba del nivel del mercurio en la cubeta indica

la presión atmosférica. Al nivel del mar, una presión atmosférica de 14.7 lb/in$^2$ hará que el nivel del mercurio en el tubo se estabilice a una altura de 76 cm, o 30 in.
En resumen, podemos escribir las siguientes medidas equivalentes de la presión atmosférica:

1 atm = 101.3 kPa = 14.7 lb/in$^2$ = 76 cm de mercurio = 30 in de mercurio = 2 116 lb/ft$^2$




*Barómetro*.

**Ejemplo**
El manómetro de mercurio se usa para medir la presión de un gas dentro de un tanque. Si la diferencia entre los dos niveles de mercurio es de 36 cm, ¿cuál es la presión absoluta dentro del tanque?

Recuerde que la presión absoluta es la suma de la presión manométrica y la presión atmosférica. El manómetro lee 36 cm, lo cual registra la diferencia entre la presión fuera del tanque (1 atm) y la presión dentro del mismo. Una atmósfera de presión es equivalente a una columna de 76 cm de mercurio. La presión absoluta en el tanque es, por tanto, la suma de 36 cm más 76 cm, o 112 cm de mercurio. La presión absoluta en el tanque es la presión debida a una columna de mercurio de 112 cm de altura.
La densidad del mercurio es 1.36 x 10$^4$ kg/m$^3$ y 112 cm es 1.12 m, así que la presión absoluta dentro del tanque se determina a partir de la ecuación.

$$P = \rho g h = (1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(1.12 \text{ m})$$

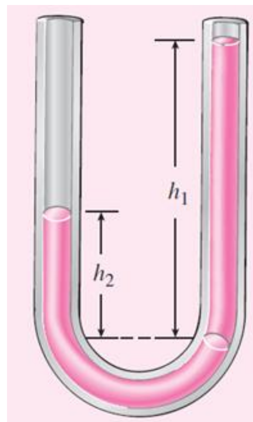
$$P = 1.49 \times 10^5 \text{ Pa o } P = 149 \text{ kPa}$$

Verifique que esta presión absoluta también se puede expresar como 1.47 atm.

**Ejercicios. Presión de fluidos**

1. Halle la presión en kilopascales producida por una columna de mercurio de 60 cm de alto. ¿Cuál es esa presión en lb/in$^2$ y en atmósferas? Resp. 80.0 kPa, 11.6 lb/in$^2$, 0.79 atm
2. Un tubo contiene agua bajo una presión manométrica de 400 kPa. Si se cubre un orificio de 4 mm de diámetro en el tubo, con un trozo de cinta adhesiva, ¿qué fuerza tendrá que ser capaz de resistir la cinta? Resp. P=5.03N
3. Si usted construye un barómetro usando agua en lugar de mercurio, ¿qué altura del agua indicará una presión de una atmósfera? $h$ = 10.3 m

4. Un pistón de 20 kg descansa sobre una muestra de gas en un cilindro de 8 cm de diámetro. ¿Cuál es la presión manométrica sobre el gas? ¿Cuál es la presión absoluta? Resp. 39.0 kPa, 140.3 kPa
5. Un tubo abierto en forma de U como el que muestra la figura siguiente tiene 1 $cm^2$ de sección transversal. ¿Qué volumen de agua deberá verterse en el tubo de la derecha para que el mercurio del tubo de la izquierda se eleve 1 cm por encima de su posición original? Resp. V = 13.6 $cm^3$
6. Suponga que los dos líquidos contenidos en el tubo en forma de U de la figura siguiente son agua y aceite. Calcule la densidad del aceite si el agua se mantiene 19 cm por encima de la interfaz y el aceite permanece a 24 cm por encima de la interfaz. Use como referencia la relación $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ . Resp. 792 kg /$m^3$




**Principio de Pascal. La prensa hidráulica**

La aplicación más frecuente de la ley de Pascal es la prensa hidráulica, que se ilustra en la figura siguiente. De acuerdo con el principio de Pascal, una presión aplicada al líquido en la columna izquierda se transmitirá íntegramente al líquido de la columna de la derecha. Por lo tanto, si una fuerza de entrada $F_i$ actúa sobre un émbolo de área $A_i$, causará una fuerza de salida $F_0$ que actúa sobre un émbolo de área $A_0$ de modo que

*Presión de entrada = presión de salida*

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$

La ventaja mecánica ideal de tal dispositivo es igual a la relación de la fuerza de salida con respecto a la fuerza de entrada. Simbólicamente escribimos

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{A_o}{A_i}$$

Una pequeña fuerza de entrada puede ser multiplicada para producir una fuerza de salida mucho mayor utilizando simplemente un émbolo de salida con un área mucho mayor que la del émbolo de entrada. La fuerza de salida está dada por

$$F_o = F_i \frac{A_o}{A_i}$$

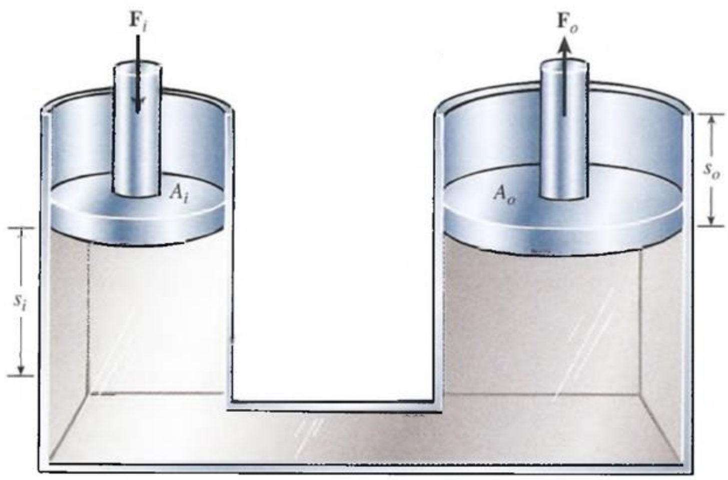
El trabajo de entrada debe ser igual al trabajo de salida si despreciamos la fricción. Si la fuerza de entrada $F_i$ recorre una distancia si mientras la fuerza de salida $F_0$ viaja una distancia $s_0$, podemos escribir

$$\textit{Trabajo de entrada} = \textit{trabajo de salida}$$

$$F_i\, s_i = F_0\, s_0$$

Esta relación conduce a otra expresión útil para la ventaja mecánica ideal de una prensa hidráulica:

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{s_i}{s_o}$$




*Prensa hidráulica.*

Observe que la ventaja mecánica se gana a expensas de la distancia de entrada. Por esta razón, la mayoría de las aplicaciones utilizan un sistema de válvulas para permitir que el pistón de salida se eleve por una serie de impulsos cortos del pistón de entrada.

**Ejemplo**
Una prensa hidráulica tiene un émbolo de entrada de 5 cm de diámetro y un émbolo de salida de 60 cm de diámetro. ¿Qué fuerza de entrada se requiere para proporcionar una fuerza total de salida capaz de levantar un automóvil de 950 kg?

Para calcular la fuerza de entrada, primero se usan los diámetros de los émbolos con el fin de determinar la ventaja mecánica ideal de la ecuación respectiva. Suponga que la fricción es insignificante y recuerde que el área de cada émbolo es $\pi d^2/4$. La fuerza de entrada necesaria puede determinarse a partir del valor calculado de $M_I$. La ventaja mecánica ideal es

$$M_I = \frac{A_o}{A_i} = \frac{\pi d_o^2/4}{\pi d_i^2/4} = \frac{d_o^2}{d_i^2}; \qquad M_I = \left(\frac{d_o}{d_i}\right)^2$$

$$M_I = \left(\frac{60\text{ cm}}{5\text{ cm}}\right)^2 = 144$$

La fuerza de salida necesaria es $F_0 = W = mg$, por tanto al resolver la ecuación para $F_i$ obtenemos

$$M_i = \frac{F_o}{F_i} = \frac{mg}{F_i} \qquad \text{o} \qquad F_i = \frac{mg}{M_I}$$

$$F_i = \frac{(950\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(1\ \text{m})}{144} = 64.7\ \text{N}$$

El principio de la prensa hidráulica se aprovecha en múltiples dispositivos mecánicos y de ingeniería. Entre los ejemplos más comunes están: la dirección hidráulica de vehículos (servodirección), el gato hidráulico, los amortiguadores y el sistema de frenos de los automóviles.

**Ejemplo**
Los émbolos de una prensa hidráulica miden 10cm y 20cm de diámetro respectivamente, ¿cuál es la magnitud de la fuerza resultante en el émbolo mayor, si es aplicada una fuerza de 1000N en el émbolo menor?

| Datos | Ecuación | Sustitución | Resultado |
|---|---|---|---|
| $F_2$ =? | $A_1 = \pi r_1^2$ | $A_1 = (3.1416)\ (0.05\text{m})^2 = 0.0078\text{m}^2$ | |
| $F_1$ = 1000N | | | |
| $D_1$ = 10 cm = 0.1m | $A_2 = \pi r_2^2$ | $A_2 = (3.1416)\ (0.1\text{m})^2 = 0.0314\text{m}^2$ | |
| $D_2$ = 20 cm = 0.2m | | | |
| $r_1 = D_1/2$ = 0.1m/2 =0.05m | $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$ $\quad F_2 = \frac{F_1\ A_2}{A_1}$ | $F_2 = \frac{(1000\text{N})\ (0.0314\text{m}^2)}{0.0078\text{m}^2}$ | $F_2$ = 4025.64N |
| $r_2 = D_2/2$ = 0.2m/2 =0.1m | | | |

**Ejercicios. Principio de Pascal. La prensa hidráulica**

1. ¿Qué fuerza se obtendrá en el émbolo mayor de una prensa hidráulica cuya área es de 100 $\text{cm}^2$, cuando en el émbolo menor de área igual a 15 $\text{cm}^2$ se aplica una fuerza cuyo valor es de 200 N?
2. Calcular la fuerza que se obtendrá en el émbolo mayor de una prensa hidráulica de un diámetro de 20 cm, si en el émbolo menor de 8 cm se ejerce una fuerza cuyo valor es de 150 N.
3. Calcular el diámetro que debe tener el émbolo mayor de una prensa hidráulica para obtener una fuerza cuyo valor es de 2000 N, cuando el émbolo menor tiene un diámetro de 10 cm y se aplica una fuerza cuyo valor es de 100 N.
4. Una fuerza de 400 N se aplica al pistón pequeño de una prensa hidráulica cuyo diámetro es de 4 cm. ¿Cuál deberá ser el valor del diámetro del pistón grande para que pueda levantar una carga de 200 kg?

**Principio de Arquímedes**

El empuje que reciben los cuerpos al ser introducidos en un líquido fue estudiado por el griego Arquímedes.
El empuje que reciben los cuerpos al ser introducidos en un líquido fue estudiado por el griego Arquímedes (287-212 a. C.), quien además se destacó por sus investigaciones realizadas sobre el uso de las palancas, la geometría plana y del espacio, y su teoría sobre los números.

Al ponerle un cubo de hielo a una bebida observamos que este no se hunde; de la misma manera al entrar a una alberca con agua logramos flotar. Si colocamos una canica sobre la superficie de un vaso con agua, esta se hunde. La explicación del porqué algunos cuerpos flotan y otros no, nos la ofrece el principio de Arquímedes.

Este dice que sobre un cuerpo dentro de un líquido se presenta una fuerza ascendente que, si es mayor que el peso del cuerpo, este no se hunde y en caso contrario, si lo hace. La magnitud de esta fuerza ascendente determina a partir del principio Arquímedes que establece:

***Un objeto que se encuentra parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascendente (fuerza de empuje) igual al peso del fluido desalojado.***

***Fuerza de empuje = peso del fluido desalojado***

$$F_e = W_{\text{fluido}} = m\,g = V\,\rho\,g$$

$F_e$ = Fuerza de empuje (N)
$W_{\text{fluido}}$ = Peso del fluido desalojado (N)
$m$ = Masa del fluido desalojado (kg)
$g$ = Aceleración de la gravedad (9.8m/s$^2$)
$V$ = Volumen del líquido desalojado (m$^3$)
$\rho$ = Densidad del fluido (kg/m$^3$)

Si suspendemos de un dinamómetro en el aire un objeto, el instrumento indicará el peso de este. Al sujetar el mismo objeto del dinamómetro y sumergirlo en un recipiente con líquido, la lectura observada será menor que en caso anterior debido a que el objeto experimenta una fuerza de empuje hacia arriba en sentido contrario al peso del mismo. La resultante de estas dos fuerzas es la lectura registrada en el dinamómetro.

**Ejemplo**
Un objeto de 500g y 20cm$^3$ está sujeto a un dinamómetro por medio de una cuerda. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando está suspendido en el aire?, b) ¿Cuál es la fuerza de empuje sobre el cuerpo cuando está totalmente sumergido en agua ($\rho$ = 1000kg/m$^3$)?, y c) ¿Cuál es la tensión en la cuerda medida en el dinamómetro cuando está sumergido el objeto?

| **Datos** | **Ecuación** | **Sustitución** | **Resultado** |
|---|---|---|---|
| $m$ = 500g = 0.5kg<br>$V$ = 20cm$^3$ = 2x10$^{-5}$m$^3$ | a) $T_{\text{en el aire}} = W_{\text{objeto}} = m\,g$ | $T_{\text{en el aire}}$ = (0.5kg) (9.8m/s$^2$) | $T_{\text{en el aire}}$ = 4.9N |
| $\rho_{\text{agua}}$ = 1000kg/m$^3$<br>a) $T_{\text{en el aire}}$ = ? | b) $F_B = V\,\rho\,g$ | $F_B$ = (2x10$^{-5}$m$^3$) (1000kg/m$^3$ ) (9.8m/s$^2$) | $F_B$ = 0.196N |
| b) $F_B$ = ?<br>c) $T_{\text{sumergido}}$= ? | c) $T_{\text{sumergido}} = T_{\text{en el aire}} - F_B$ | $T_{\text{sumergido}}$= 4.9N – 0.196N | $T_{\text{sumergido}}$= 4.704N |

**Ejercicios. Principio de Arquímedes**

1. Un cubo de hacer de 20 cm de arista se sumerge totalmente en agua. Si tiene un peso de 564.48 N Calcular: a) la fuerza de empuje, b) el peso aparente del cubo.
2. Un cubo de metal con densidad igual a 12000 kg/m$^3$, de 2 cm por lado se ata al extremo de una cuerda y se sumerge totalmente en agua con densidad igual a 1000 kg/m$^3$. Calcular: a) la fuerza de empuje, b) el peso aparente del cubo.
3. Un prisma rectangular de cobre, de base igual a 36 cm$^2$ y una altura de 10 cm se sumerge hasta la mitad, por medio de un alambre, en un recipiente que contiene alcohol cuya densidad es 790 kg/m$^3$. Calcular: a) el volumen de alcohol que desaloja, b) la fuerza de empuje que recibe, c) el peso aparente del prisma, si su peso real es de 31.36 N.

**Resuelve las siguientes actividades**

## I.- Cuestionario:

1. ¿Qué estudia la Hidráulica?
2. ¿Qué estudia la Hidrostática?
3. ¿Qué estudia la Hidrodinámica?
4. ¿A qué se le llama fluido?
5. ¿Cuáles son las características de un fluido ideal?
6. ¿A qué se llama fuerza de cohesión?
7. ¿Qué es viscosidad?
8. ¿Qué es adherencia?
9. ¿Qué es tensión superficial?
10. ¿Qué es capilaridad?
11. ¿A qué se le llama densidad?
12. ¿A qué se le llama peso específico?
13. ¿Cómo varia la presión en los líquidos?
14. ¿Qué dice el principio de Pascal?
15. ¿Qué establece el principio de Arquímedes?

# II.-Completa los espacios en blanco.

1.-La materia se presenta en _________________ estados físicos que son________________, ___________________ y _________________.
2.-Los líquidos y gases se llaman __________________ porque sus____________________ se pueden deslizar unas sobre otras al estar ligadas por fuerzas relativamente____________________.
3.-La propiedad que poseen los líquidos de poder_______________ por tubos delgados, debido a la cohesión y ___________________ entre las moléculas se llama ____________________.
4.-La propiedad de la materia que permite identificar un material de acuerdo con la relación de su masa y el volumen que esta ocupa se llama____________________.
5.-La ____________________ en un líquido se ejerce en todas direcciones, esto fue demostrado por _________ ___________________.

# III.-Contesta la respuesta correcta

1.- ¿Cómo se define la densidad de un cuerpo?

a) La masa contenida por la unidad de área.
b) El volumen contenido en una unidad de masa
c) La masa por cada centímetro.
d) La masa por unidad de volumen

2.- ¿Qué es la fuerza de cohesión?

a) La valencia que hay entre dos moléculas
b) La atracción que hay entre sólido y liquido
c) La atracción que hay entre las moléculas
d) La atracción entre dos protones

3.- La fuerza por unidad de área se denomina

a) Peso especifico
b) Densidad
c) Peso
d) Presión

4.- El personaje a quien se atribuye que salió gritando “Eureka” al estarse bañando en una tina fue:

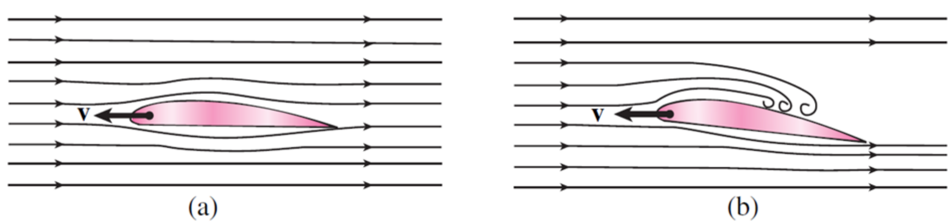
a) Newton
b) Pascal
c) Sócrates
d) Arquímedes

5.-La afirmación “Todo objeto está sumergido en un líquido, experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del líquido desalojado” se conoce como:

a) Principio de Joule
b) Principio de Pascal
c) Principio de Arquímedes
d) Principio de Boyle

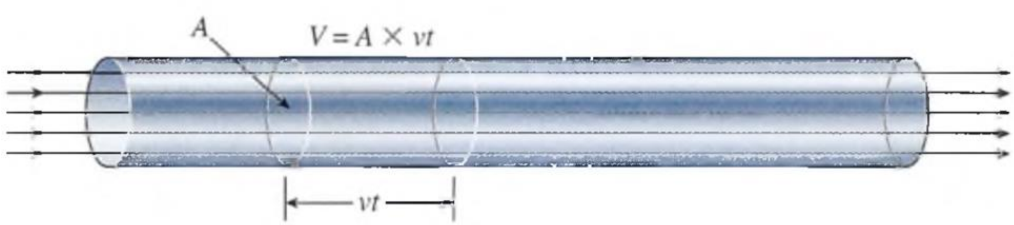
**Flujo de fluidos**

El flujo aerodinámico es el movimiento de un fluido en el cual cada partícula en el fluido sigue la misma trayectoria (pasa por un punto particular) que siguió la partícula anterior.
La figura muestra las líneas de corriente de flujo de aire que pasan por dos obstáculos estacionarios. Observe que las líneas de corriente se rompen cuando el aire pasa sobre el segundo obstáculo, generando corriente turbulenta y remolinos. Estos pequeños remolinos representan el flujo turbulento y absorben gran parte de la energía del fluido, incrementando el arrastre por fricción a través del fluido.
Vamos a considerar, además, que los fluidos son incompresibles y que no presentan una fricción interna apreciable. En estas condiciones, se pueden hacer algunas predicciones acerca de la razón de flujo del fluido (gasto) a lo largo de una tubería o de otro recipiente.
El flujo del fluido (gasto) se define como el volumen de fluido que pasa a través de cierta sección transversal en una unidad de tiempo.




*Flujos laminar y turbulento en la trayectoria de un fluido.*

Para expresar esta razón en forma cuantitativa, consideraremos el caso de un líquido que fluye a lo largo de una tubería como la que se ilustra en la figura siguiente, con una velocidad media *v*.




*Cálculo de la velocidad de un fluido que circula por un tubo.*

En un espacio de tiempo $t$, cada partícula en la corriente se mueve a través de una distancia $vt$.
El volumen V que fluye a través de la sección transversal A está dado por

$$V = A\,v\,t$$

Por lo tanto, el gasto (volumen por unidad de tiempo) se puede calcular partiendo de

$$R = \frac{Avt}{t} = vA$$

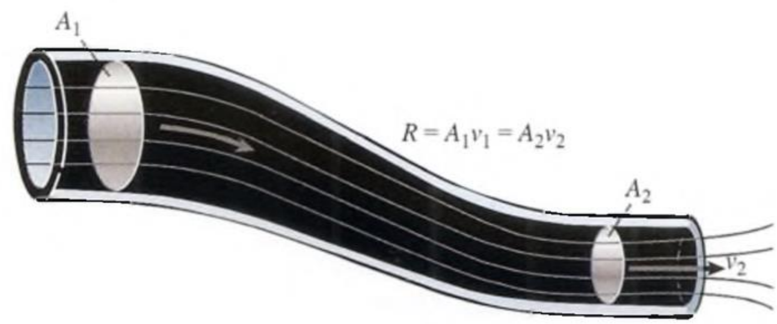
$$\textit{Gasto} = \textit{velocidad} \times \textit{sección transversal}$$

Las unidades de $R$ expresan la relación de una unidad de volumen entre una unidad de tiempo.

Ejemplos frecuentes de esto son: pies cúbicos por segundo, metros cúbicos por segundo, litros por segundo y galones por minuto.
Si el fluido es incompresible y no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna, el gasto $R$ permanecerá constante. Esto significa que una variación en la sección transversal en la tubería, como se muestra en la figura siguiente, da por resultado un cambio en la rapidez del líquido, de tal modo que el producto $vA$ permanece constante. Simbólicamente escribimos

$$R = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Un líquido fluye con más rapidez a través de una sección estrecha de tubería y más lentamente a través de secciones más amplias. Este principio es la causa de que el agua fluya más rápido en las partes de un arroyo donde las orillas del mismo están más cercanas entre sí.




*En el flujo laminar, el producto de la velocidad del fluido por el área de la sección transversal del tubo es constante en cualquier punto.*

**Ejemplo**
El agua fluye a través de una manguera de hule de 2 cm de diámetro a una velocidad de 4 m/s. (a) ¿Qué diámetro debe tener el chorro si el agua sale a 20 m/s? (b) ¿Cuál es el gasto en metros cúbicos por minuto?

El gasto debe ser el mismo tanto en la manguera como a través del chorro, así que $A_1 v_1 = A_2 v_2$ A partir de esto, determinamos la velocidad a través del chorro. Después de determinar el área de cualquier abertura, podemos multiplicar por la velocidad para hallar el gasto.
Solución (a): Como el área A es proporcional al cuadrado del diámetro, podemos escribir

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 \qquad \text{o} \qquad d_2^2 = \frac{v_1 d_1^2}{v_2}$$

A partir de lo cual

$$d_2 = \sqrt{\frac{v_1 d_1^2}{v_2}} = \sqrt{\frac{(4\ \text{m/s})(2\ \text{cm})^2}{(20\ \text{m/s})}} = \sqrt{0.80\ \text{cm}^2} = 0.894\ \text{cm}$$

Solución (b): Para calcular el gasto, primero debemos determinar el área de la manguera de 2 cm de diámetro.

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi (2\ \text{cm})^2}{4} = 3.14\ \text{cm}^2 = 3.14\ \text{cm}^2 \left(\frac{1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}{1\ \text{cm}^2}\right) = 3.14 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

El gasto es $R = A_1 v_1$, así que

$$R = (3.14 \times 10^{-4}\ m^2)(4\ m/s) = 1.26 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

$$R = (1.26 \times 10^{-3}\ m^3/s)(60\ s/min) = 0.0754\ m^3/min$$

El mismo valor debe obtenerse considerando el producto $A_2 v_2$.

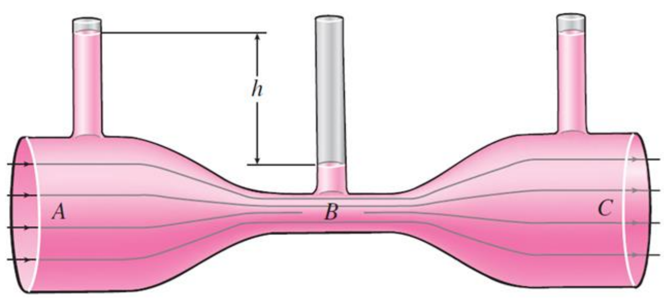
**Presión y velocidad**

La velocidad de un fluido aumenta cuando fluye a través de un angostamiento.
Un incremento en la velocidad únicamente se puede deber a la presencia de una fuerza de aceleración. Para acelerar un líquido que entra al angostamiento, la fuerza de empuje proveniente de la sección transversal amplia debe ser mayor que la fuerza de resistencia del angostamiento. En otras palabras, la presión en los puntos A y C, en la figura siguiente debe ser mayor que la presión en B. Los tubos insertados en la tubería sobre dichos puntos indican claramente la diferencia de presión. El nivel del fluido en el tubo situado sobre la parte angosta es más bajo que el nivel en las áreas adyacentes. Si h es la diferencia de altura, la diferencia de presión está dada por

$$P_A - P_B = \rho g h$$

Esto es cierto si se supone que la tubería está en posición horizontal y que no se producen cambios de presión debido al cambio de energía potencial.

El ejemplo anterior, como se muestra en la figura siguiente, muestra el principio del medidor Venturi. Partiendo de la determinación de la diferencia de la presión, este dispositivo hace posible el cálculo de la velocidad del agua en una tubería horizontal.




*El incremento de la velocidad de un fluido que se desplaza a través de una sección más estrecha de un tubo provoca una caída en la presión.*

El efecto Venturi tiene muchas otras aplicaciones tanto para líquidos como para gases. El carburador de un automóvil utiliza el principio Venturi para mezclar vapor de gasolina y aire.

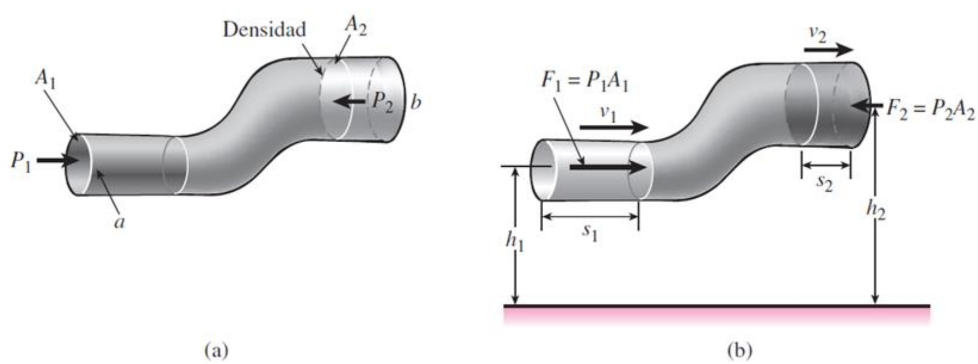
**Ejercicios. Flujo de fluidos**

1. A partir de un depósito terminal de 3 cm de diámetro, fluye agua con una velocidad promedio de 2 m/s. ¿Cuál es el gasto en litros por minuto (1 L = 0.001 m$^3$)? ¿Cuánto tardará en llenarse un recipiente de 40 L? Resp. $t$ = 28.3 s
2. ¿Cuál tendrá que ser el diámetro de una manguera para que pueda conducir 8 L de petróleo en 1 min con una velocidad de salida de 3 m/s? Resp. 7.52 mm
3. El agua que fluye a 6 m/s por un tubo de 6 cm pasa a otro tubo de 3 cm conectado al primero. ¿Cuál es su velocidad en el tubo pequeño? ¿Es mayor el gasto en el tubo más pequeño? Resp. 24 m/s, no

**Ecuación de Bernoulli**

En el estudio sobre fluidos, destacan cuatro parámetros: la presión $P$, la densidad $\rho$, la velocidad $v$, y la altura $h$ sobre algún nivel de referencia. El primero en establecer la relación entre estas cantidades y su capacidad para describir fluidos en movimiento fue el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782). Los pasos que condujeron al desarrollo de esta relación fundamental se pueden comprender considerando la figura siguiente.
Puesto que un fluido tiene masa, debe obedecer a las mismas leyes de la conservación establecidas para los sólidos. En consecuencia, el trabajo necesario para mover cierto volumen de fluido a lo largo de la tubería debe ser igual al cambio total en energía potencial y cinética.
Consideremos el trabajo requerido para mover el fluido del punto $a$ al punto $b$ en la figura (a). El trabajo neto debe ser la suma del trabajo realizado por la fuerza de entrada $F_1$ y el trabajo negativo efectuado por la fuerza de resistencia $F_2$.

$$\textit{Trabajo neto} = F_1 s_1 - F_2 s_2$$




*Deducción de la ecuación de Bernoulli.*

Pero $F_1 = P_1 A_1$ y $F_2 = P_2 A_2$, de modo que

$$\text{Trabajo neto} = P_1 A_1 s_1 - P_2 A_2 s_2$$

El producto del área y la distancia representa el volumen $V$ del fluido que se mueve a través de la tubería. Puesto que este volumen es el mismo en la parte inferior que en la parte superior de la tubería, podemos sustituir

$$V = A_1 s_1 = A_2 s_2$$

y obtener

$$\text{Trabajo neto} = P_1 V - P_2 V = (P_1 - P_2)V$$

La energía cinética $E_k$ de un fluido se define como ½ $mv^2$, donde m es la masa del fluido y $v$ es su velocidad. Puesto que la masa permanece constante, únicamente hay un cambio en la energía cinética $\Delta E_k$ debido a la diferencia de velocidad del fluido. En nuestro ejemplo, el cambio en la energía cinética es

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

La energía potencial de un fluido a una altura h sobre algún punto de referencia se define como $mgh$, donde $mg$ representa el peso del fluido. El volumen del fluido que se mueve a lo largo de la tubería es constante. Por consiguiente, el cambio en la energía potencial $\Delta E_p$ es el resultado del incremento de altura del fluido de $h_1$ a $h_2$:

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1$$

Ahora estamos preparados para aplicar el principio de la conservación de la energía. El trabajo neto realizado sobre el sistema debe ser igual a la suma de los incrementos en energía cinética y energía potencial. Por tanto,

$$\text{Trabajo neto} = \Delta K + \Delta U$$
$$(P_1 - P_2)V = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

Si la densidad del fluido es $\rho$, podemos sustituir $V = m/\rho$, lo que nos da

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

Si se multiplica por $\rho/m$ y se reordenan los términos se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

En vista de que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera, la ecuación de Bernoulli se puede enunciar en una forma más simple como

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \qquad \textit{Ecuación de Bernoulli}$$

La ecuación de Bernoulli se aplica en casi todos los aspectos del flujo de fluidos. La presión $P$ debe reconocerse como la presión absoluta y no la presión manométrica. Recuerde que $\rho$ es la densidad y no el peso específico del fluido. Observe que las unidades de cada término de la ecuación de Bernoulli son unidades de presión.

**Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli**

En gran número de situaciones físicas, la velocidad, la altura o la presión de un fluido son constantes. En tales casos, la ecuación de Bernoulli adquiere una forma más simple. Por ejemplo, cuando un líquido es estacionario, tanto $v_1$ como $v_2$ valen cero. La ecuación de Bernoulli nos mostrará que la diferencia de presiones es

$$P_2 - P_1 = \rho g (h_1 - h_2)$$

Esta ecuación es idéntica a la relación estudiada para fluidos en reposo.
Otro resultado importante se presenta cuando no hay cambio en la presión ($P_1 = P_2$). En la figura 15.18 un líquido sale de un orificio situado cerca del fondo de un tanque abierto. Su velocidad cuando sale del orificio puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli.

Debemos suponer que el nivel del líquido en el tanque desciende lentamente en comparación con la velocidad de salida, de tal modo que la velocidad $v_2$, en la parte superior puede considerarse cero. Además, debe tomarse en cuenta que la presión del líquido tanto en la parte superior como en el orificio es igual a la presión atmosférica. Entonces, $P_1 = P_2$ y $v_2 = 0$, lo que reduce la ecuación de Bernoulli a

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2$$

o bien

$$v_1^2 = 2g\,(h_2 - h_1) = 2gh$$

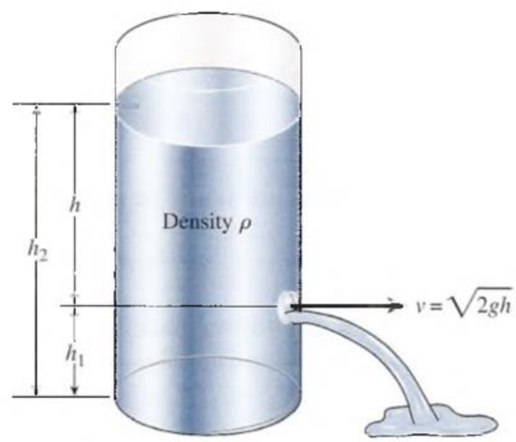
Esta relación se conoce como teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Note que la velocidad de salida de un líquido a la profundidad h es la misma que la de un objeto que se dejara caer del reposo desde una altura $h$.

El gasto al cual un líquido fluye desde un orificio está dada por $vA$. La relación de Torricelli nos permite expresar el gasto en términos de la altura del líquido sobre el orificio. Por tanto.

$$R = vA = A\sqrt{2gh}$$




*Teorema de Torricelli*

**Ejemplo**
Una fisura en un tanque de agua tiene un área de sección transversal de 1 cm$^2$. ¿A qué rapidez sale el agua del tanque si el nivel del agua en éste es de 4 m sobre la abertura?

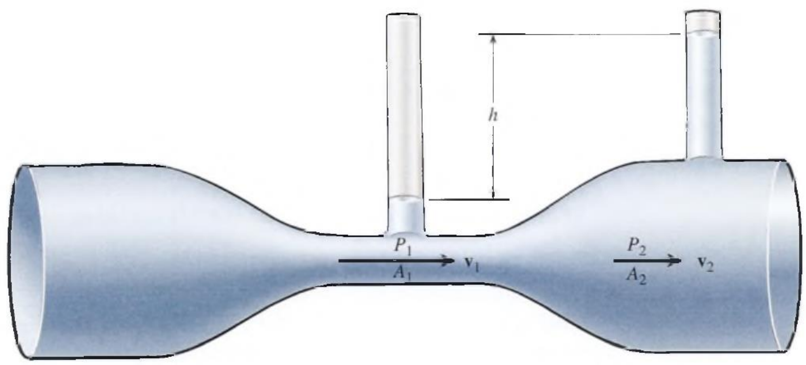
El área $A = 1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$ y la altura $h = 4$ m.

$$R = A\sqrt{2gh} = (10^{-4}\ \text{m}^2)\sqrt{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(4\ \text{m})}$$
$$= (10^{-4}\ \text{m}^2)(8.85\ \text{m/s}) = 8.85 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Como una aplicación final, considere el efecto Venturi que describe el movimiento de un fluido a lo largo de un angostamiento. Si la tubería de la figura 15.20 es horizontal, podemos establecer que $h_1 = h_2$ en la ecuación de Bernoulli, lo que nos da

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Puesto que $v_1$ es mayor que $v_2$, se deduce que la presión $P_1$ y debe ser menor que la presión $P_2$, para que se satisfaga la ecuación (15.19). Esta relación entre la velocidad y la presión ya se ha estudiado.




*Flujo de un fluido a lo largo de un estrechamiento en una tubería horizontal.*

**Ejemplo**
Por un tubo Venturi como el de la figura 15.20 fluye agua a una velocidad de $v_1 = 4$ m/s. Si $h = 8$ cm, ¿cuál será la velocidad de salida $v_2$ cuando fluye hacia el tubo más grande?

Primero calcularemos la diferencia de presión entre las regiones más estrecha y más amplia con base en la diferencia de alturas $h$ del líquido. Luego, aplicaremos la ecuación de Bernoulli para el flujo de fluido horizontal con el fin de hallar otra expresión para la diferencia en la presión. Al usar las otras ecuaciones, podemos eliminar la necesidad de conocer la presión y resolver para la velocidad de salida.

La diferencia de presión, es

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

Usando la ecuación de Bernoulli donde el centro del flujo de fluido no cambia, tenemos

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Al combinar estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Multiplicando por 2 y dividiendo entre la densidad p, se puede simplificar ésta expresión:

$$2gh = v_1^2 - v_2^2$$

Note que esta relación es similar a la de la caída libre de un cuerpo. Ahora se puede resolver ésta ecuación para la velocidad de salida $v_2$ .

$$v_2^2 = v_1^2 - 2gh \qquad \text{or} \qquad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh}$$
$$v_2 = \sqrt{(4\ \mathrm{m/s})^2 - 2(9.8\ \mathrm{m/s^2})(0.08\ \mathrm{m})} = \sqrt{14.4\ \mathrm{m^2/s^2}}$$
$$v_2 = 3.80\ \mathrm{m/s}$$

La velocidad es menor en la tubería que tiene una sección transversal más grande.
En el ejemplo anterior, la densidad p del fluido no participó en nuestros cálculos debido a que la densidad del fluido en el angostamiento fue la misma que en la sección transversal más grande. En éste tipo de aplicaciones se debe recordar que la densidad p en la ecuación de Bernoulli es la densidad de masa y no el peso específico.

**Ejercicios. Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli**

1. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua a través de una grieta del recipiente localizada 6 m por debajo de la superficie del agua? Si el área de la grieta es 1.3 cm$^2$, ¿con qué gasto sale el agua del recipiente? Resp. 10.8 m/s, 1.41 X 10$^{-3}$ m$^3$/s
2. En el costado de un depósito de agua hay un orificio de 2 cm de diámetro, localizado 5 m por debajo del nivel del agua que contiene el depósito. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua por el orificio? ¿Qué volumen de agua escapará por ese orificio en 1 min? Resp. $v$ = 9.90 m/s, $R$ = 187 L/min
3. El agua circula a través de un tubo a 4 m/s bajo una presión absoluta de 200 kPa. El tubo se estrecha después hasta la mitad de su diámetro original. ¿Cuál es la presión absoluta en la parte angosta del tubo? Resp. 80.0 kPa
4. El agua fluye continuamente por un tubo horizontal. En un punto donde la presión absoluta es de 300 kPa, la velocidad es de 2 m/s. Más adelante, el tubo se estrecha bruscamente, haciendo que la presión absoluta descienda a 100 kPa. ¿Cuál será la velocidad del agua en esta zona angosta? Resp. $v_2$ = 20.1 m/s

**Cuestionario. Flujo de fluidos.**

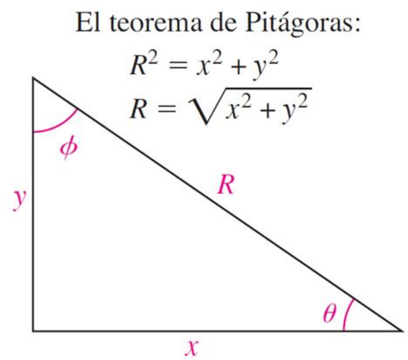
1. ¿El gasto en la salida en una tubería con el doble de sección respecto a la entrada, aumenta, disminuye o es igual respecto al de entrada? Explica.
2. Al soplar por la cara superior de una hoja de papel, esta se eleva. ¿Por qué?
3. El chorro de agua que sale de una llave se angosta en la parte inferior ¿Por qué?

# ANEXOS

### Anexo 1. Trigonometría del triángulo rectángulo

A menudo es necesario determinar las longitudes y los ángulos a partir de los triángulos. Si aprende algunos principios que se aplican a todos los triángulos rectángulos, mejorará de manera significativa su habilidad para trabajar con vectores.
La convención de usar letras griegas para identificar los ángulos y letras romanas para los lados. Los símbolos griegos que se usan comúnmente son: $\alpha$ (alfa), $\beta$ (beta), $\gamma$ (gama), $\theta$ (theta), $\phi$ (phi), $\delta$ (delta).

En el triángulo rectángulo, los símbolos $R$, $x$ y $y$ se refieren a las dimensiones de los lados, mientras que $\theta$, $\phi$ y 90° corresponden a los ángulos.

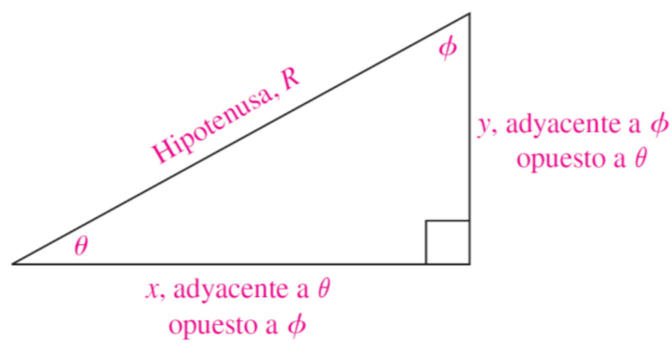



En un triángulo rectángulo hay tres relaciones importantes entre los lados: el seno, el coseno y la tangente, que en el caso del ángulo $\theta$ se definen así:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{op\,\theta}{hip}$$

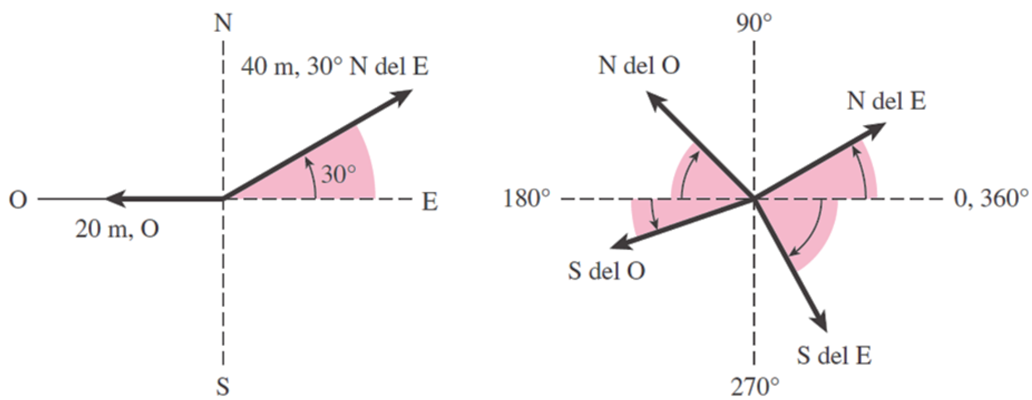
$$\cos\theta = \frac{ady\,\theta}{hip}$$

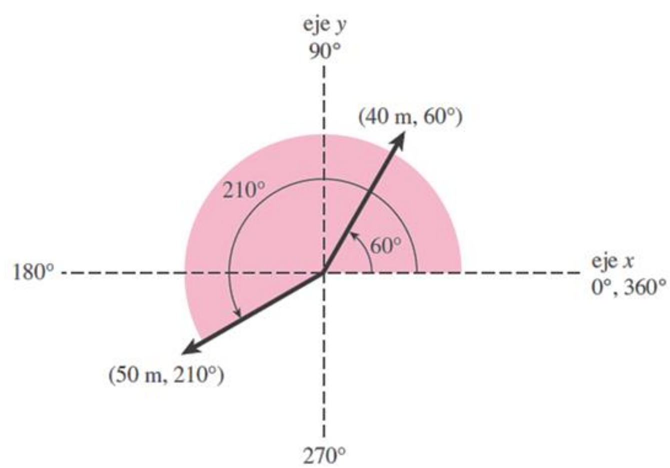
$$\tan\theta = \frac{op\,\theta}{ady}$$



**Anexo 2. Cantidades vectoriales y escalares**

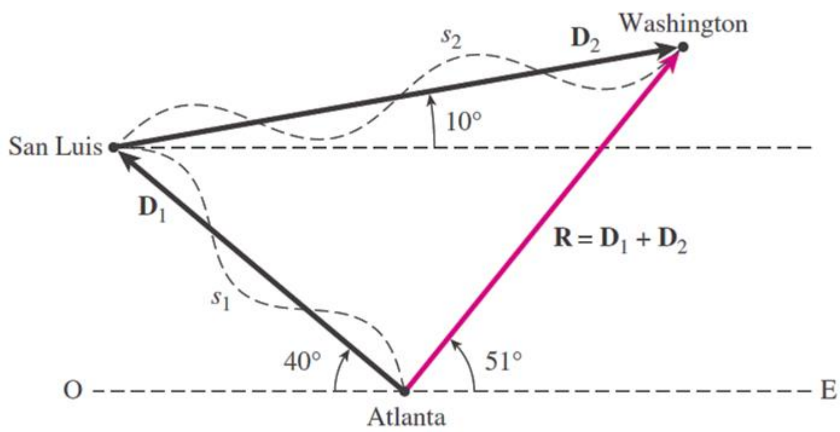
Una cantidad escalar se especifica totalmente por su magnitud que consta de un número y una unidad. Por ejemplo, rapidez (15 mi/h), distancia (12 km) y volumen (200 $cm^3$).
Una cantidad vectorial se especifica totalmente por una magnitud, una dirección y sentido. Por ejemplo, desplazamiento (20 m, N) y velocidad (40 mi/h, 30° N del O).
La dirección de un vector puede indicarse tomando como referencia las direcciones convencionales norte (N), este (E), oeste (O) y sur (S). Considere, por ejemplo, los vectores 20 m, O y 40 m a 30° N del E. La expresión "al Norte del Este" indica que el ángulo se forma haciendo girar una línea hacia el Norte, a partir de la dirección Este.




*La dirección de un vector se indica como un ángulo medido a partir del eje positivo x.*

El desplazamiento es una cantidad vectorial; su dirección se indica mediante una flecha continua. La distancia es una cantidad escalar, representada con una línea discontinua.




**Suma o adición de vectores por métodos gráficos**

El método del polígono puede aplicarse a más de dos vectores. El método del paralelogramo es conveniente para sumar sólo dos vectores a la vez. En ambos casos, la magnitud de un vector se indica a escala mediante la longitud de un segmento de recta. La dirección se marca colocando una punta de flecha en el extremo del segmento de dicha recta.

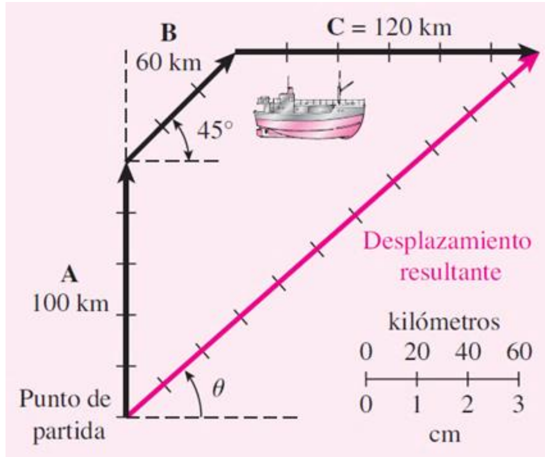
**Ejemplo**
Un barco recorre 100 km hacia el Norte durante el primer día de viaje, 60 km al noreste el segundo día y 120 km hacia el Este el tercer día. Encuentre el desplazamiento resultante con el método del polígono.

Plan: Tome como punto de inicio el origen del viaje y decida una escala apropiada. Use un transportador y una regla para dibujar la longitud de cada vector de manera que sea proporcional a su magnitud. El desplazamiento resultante será un vector dibujado desde el origen a la punta del último vector.
Solución: Una escala conveniente puede ser 20 km = 1 cm. Utilizando esta escala, notamos que

$$100\text{ km} = 100\,\cancel{\text{km}} \times \frac{1\text{ cm}}{20\,\cancel{\text{km}}} = 5\text{ cm}$$
$$60\text{ km} = 60\,\cancel{\text{km}} \times \frac{1\text{ cm}}{20\,\cancel{\text{km}}} = 3\text{ cm}$$
$$120\text{ km} = 120\,\cancel{\text{km}} \times \frac{1\text{ cm}}{20\,\cancel{\text{km}}} = 6\text{ cm}$$

Al realizar la medición con una regla, a partir del diagrama a escala se observa que la flecha resultante tiene 10.8 cm de longitud. Por tanto, la magnitud es

$$10.8\text{ cm} = 10.8\,\cancel{\text{cm}} \times \frac{20\text{ km}}{1\,\cancel{\text{cm}}} = 216\text{ km}$$




Si se mide el ángulo q con un transportador, resulta que la dirección es de 41°. Por tanto, el desplazamiento resultante es R = (216 km, 41°)

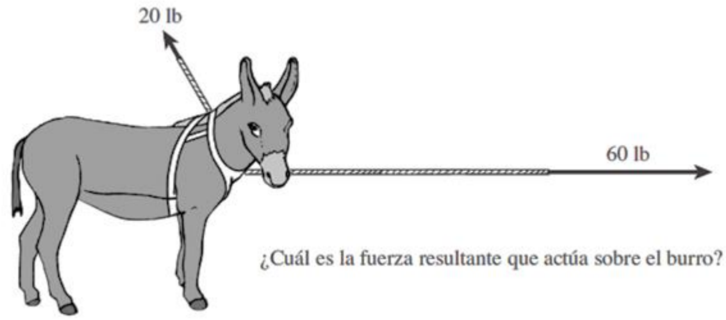
Los métodos gráficos sirven para hallar la resultante de todo tipo de vectores. No se limitan sólo a la medición de desplazamientos, pues son particularmente útiles para encontrar la resultante de numerosas fuerzas. Por ahora, consideremos como definición de fuerza un empujón o tirón que tiende a producir movimiento. El vector fuerza se especifica también por medio de un número, unidades correspondientes y ángulo, así como desplazamientos, y se suma de la misma manera que los vectores de desplazamiento.

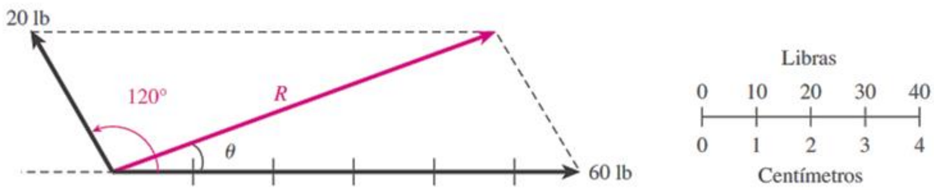
**El método del polígono para sumar vectores**

1. Elija una escala y determine la longitud de las flechas que corresponden a cada vector.
2. Dibuje a escala una flecha que represente la magnitud y dirección del primer vector.
3. Dibuje la flecha del segundo vector de modo que su cola coincida con la punta de la flecha del primer vector.
4. Continúe el proceso de unir el origen de cada vector con las puntas hasta que la magnitud y la dirección de todos los vectores queden bien representados.
5. Dibuje el vector resultante con el origen (punto de partida) y la punta de flecha unida a la punta del último vector.
6. Mida con regla y transportador para determinar la magnitud y la dirección del vector resultante.

**Ejemplo**
Encuentre la fuerza resultante sobre el burro de la figura, si el ángulo entre las dos cuerdas es de 120°. En un extremo se jala con una fuerza de 60 lb y, en el otro, con una fuerza de 20 lb.

Construya un paralelogramo formando dos de los lados con vectores dibujados que sean proporcionales a las magnitudes de las fuerzas. Por tanto, la fuerza resultante puede encontrarse al medir la diagonal del paralelogramo.




Utilizando una escala de 1 cm = 10 lb, se tiene

$$60\ \text{lb} \times \frac{1\ \text{cm}}{10\ \text{lb}} = 6\ \text{cm} \qquad 20\ \text{lb} \times \frac{1\ \text{cm}}{10\ \text{lb}} = 2\ \text{cm}$$

En la figura se construyó un paralelogramo, dibujando a escala las dos fuerzas a partir de un origen común. Utilice un transportador para asegurarse de que el ángulo entre ellas sea de 120°. Al completar el paralelogramo se puede dibujar la resultante como una diagonal desde el origen. Al medir R y u con una regla y un transportador se obtienen 52.9 lb para la magnitud y 19.1° para la dirección. Por consiguiente,

$$R = (52.9\ \text{lb},\ 19.1°)$$

**Fuerza y vectores**

Un resorte estirado ejerce fuerzas sobre los dos objetos que están unidos a sus extremos; el aire comprimido ejerce una fuerza sobre las paredes del recipiente que lo contiene, y un tractor ejerce una fuerza sobre el remolque que lleva arrastrando. Probablemente la fuerza más conocida es la atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre un cuerpo. A esta fuerza se le llama peso del cuerpo. Existe una fuerza bien definida aun cuando no estén en contacto la Tierra y los cuerpos que atrae. El peso es una cantidad vectorial dirigida hacia el centro del planeta.
La unidad de fuerza en el sistema internacional es el newton (N). Conviene señalar que su relación con la libra es:

1 N = 0.225 lb      1 lb = 4.45 N

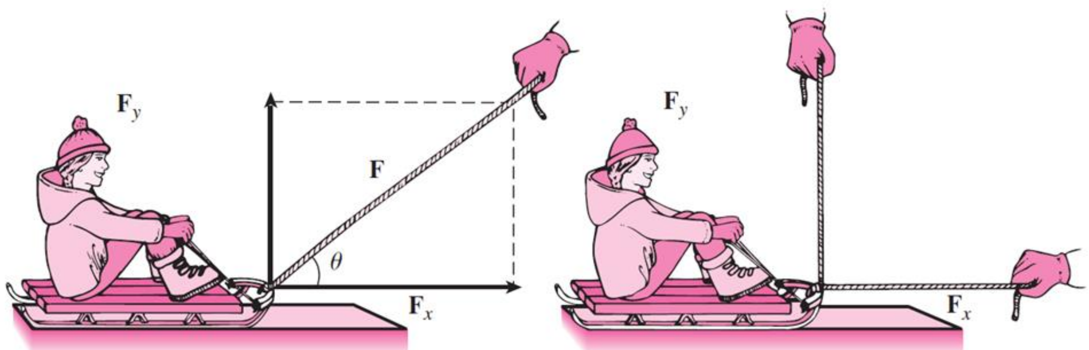
Una mujer que pesa 120 lb tiene una equivalencia de 534 N. Mientras no llegue el día en que todas las industrias hayan adoptado íntegramente las unidades del SI, la libra seguirá usándose, y con frecuencia será necesario realizar conversiones de unidades.

Dos de los efectos producidos por las fuerzas que pueden medirse son: (1) cambiar las dimensiones o la forma de un cuerpo y (2) cambiar el movimiento del cuerpo. Si en el primer caso no hay un desplazamiento resultante de dicho cuerpo, la fuerza que causa el cambio de forma se llama fuerza estática. Si una fuerza cambia el movimiento del cuerpo se llama fuerza dinámica. Ambos tipos de fuerzas se representan convenientemente por medio de vectores.

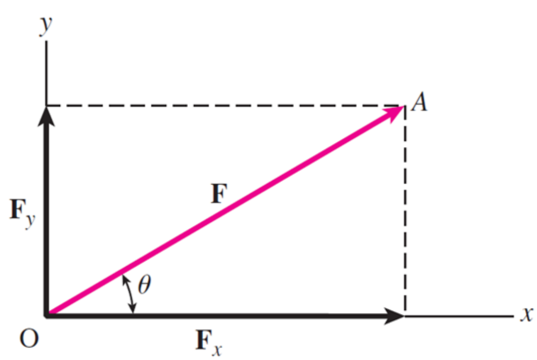
La eficacia de cualquier fuerza depende de la dirección en la que actúa. Por ejemplo, es más fácil arrastrar un trineo por el suelo usando una cuerda inclinada, que si se le empuja. En cada caso, la fuerza aplicada produce más de un solo esfuerzo. Dicho de otro modo, la fuerza ejercida sobre la cuerda levanta el trineo y lo mueve hacia adelante al mismo tiempo. En forma similar, al empujar el trineo se produce el efecto de añadirle peso. Esto nos lleva a la idea de las **componentes de una fuerza**: los valores reales de una fuerza en direcciones diferentes a la de la fuerza misma. En la figura, la fuerza F puede reemplazarse por sus componentes horizontal y vertical, $F_x$ y $F_y$.

Si una fuerza se representa gráficamente por su magnitud y un ángulo ($R$, $\theta$), se pueden determinar sus componentes a lo largo de las direcciones $x$ y $y$. Una fuerza F actúa con un ángulo $\theta$ sobre la horizontal, como se indica en la figura. El significado de las componentes $x$ y $y$, $F_x$ y $F_y$, se puede apreciar en este diagrama. El segmento que va desde O hasta el pie de la perpendicular que baja de A al eje $x$, se llama componente $x$ de $F$ y se indica como $F_x$.

El segmento que va desde O hasta el pie de la perpendicular al eje y que parte de A se llama componente y de F y se suele indicar como $F_y$. Si se dibujan los vectores a escala, se puede determinar gráficamente la magnitud de las componentes. Estas dos componentes, actuando juntas, tienen el mismo efecto que la fuerza original F.




Representación gráfica de las componentes $x$ y $y$ de F.




**Ejemplo**

Una cortadora de césped se empuja hacia abajo por el asa con una fuerza de 160 N, en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la magnitud de la componente horizontal de esta fuerza?

A partir de la figura (a), se observa que la fuerza ejercida sobre el asa actúa en el cuerpo de la cortadora. Usaremos una regla y un transportador para dibujar las fuerzas y ángulos a escala, como se muestra en la figura (b). Por último, mediremos las componentes y las convertiremos a newtons para obtener las dos componentes.

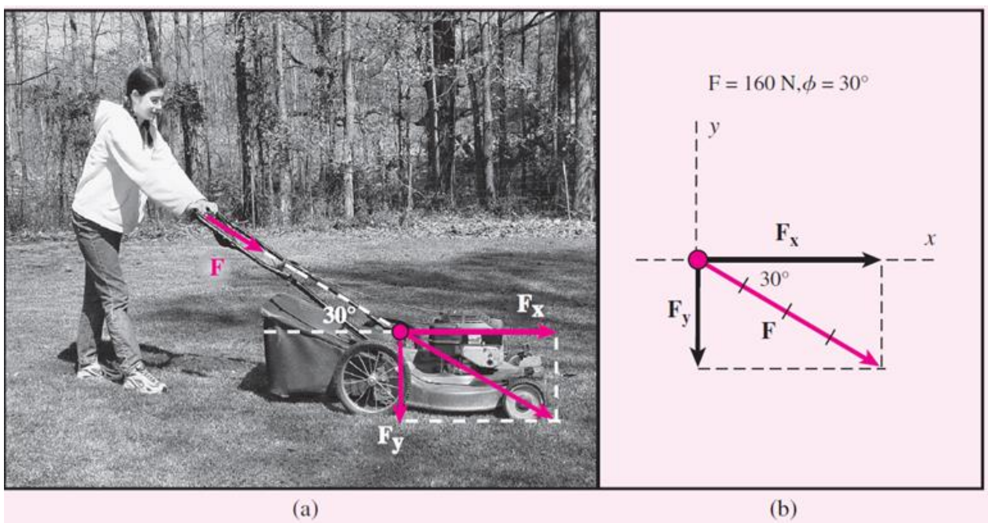
Una escala conveniente puede ser 1 cm = 40 N, lo cual significa que el vector $F$ tendría una longitud de 4 cm con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. La componente $x$ de la fuerza se dibuja y se le llama $F_x$. La medición de esta recta revela que

$F_x$ corresponde a 3.46 cm

Puesto que 1 cm = 40 N, se obtiene

$$F_x = 3.46 \text{ cm}\left(\frac{40 \text{ N}}{1 \text{ cm}}\right) = 138 \text{ N}$$

Observe que la fuerza real es bastante menor que la fuerza aplicada. Como ejercicio adicional, demuestre que la magnitud de la componente descendente de la fuerza de 160 N es $F_y$ = 80.0 N.

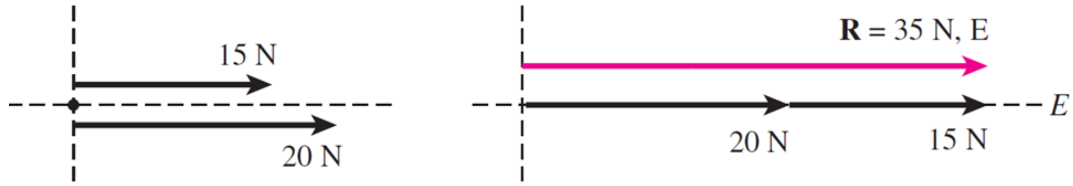



Obtención de las componentes de una fuerza por el método gráfico. (Foto de Paul E. Tippens.)

**La fuerza resultante**

Cuando dos o más fuerzas actúan sobre un mismo punto de un objeto, se dice que son fuerzas concurrentes. El efecto combinado de tales fuerzas se llama fuerza resultante.
La fuerza resultante es la fuerza individual que produce el mismo efecto tanto en la magnitud como en la dirección que dos o más fuerzas concurrentes.
Las fuerzas resultantes pueden calcularse gráficamente al representar cada fuerza concurrente como un vector. Con el método del polígono o del paralelogramo para sumar vectores se obtiene la fuerza resultante.

Con frecuencia las fuerzas actúan sobre una misma recta, ya sea juntas o en oposición.
Si dos fuerzas actúan sobre un mismo objeto en una misma dirección, la fuerza resultante es igual a la suma de las magnitudes de dichas fuerzas. La dirección de la resultante es la misma que la de cualquiera de las fuerzas. Por ejemplo, considere una fuerza de 15 N y una fuerza de 20 N que actúan en la misma dirección hacia el Este. Su resultante es de 35 N hacia el Este, como se observa en la figura siguiente (a).

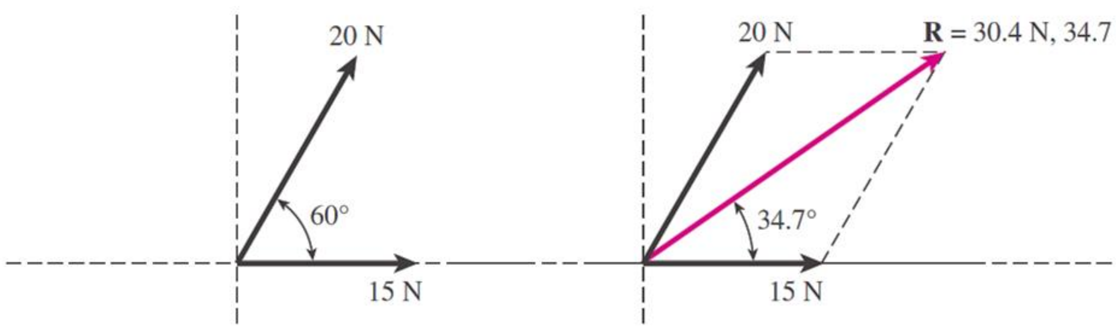



(a) Fuerzas en la misma dirección.

Si las mismas dos fuerzas actúan en direcciones opuestas, la magnitud de la fuerza resultante es igual a la diferencia de las magnitudes de las dos fuerzas y actúa en la dirección de la fuerza más grande. Suponga que la fuerza de 15 N del ejemplo se cambiara, de modo que tirara hacia el Oeste. La resultante sería de 5 N, E, como se indica en la figura (b).


(b) Fuerzas que actúan en direcciones opuestas.

Si las fuerzas que actúan forman un ángulo de entre 0° y 180° entre sí, su resultante es el vector suma. Para encontrar la fuerza resultante puede utilizarse el método del polígono o el método del paralelogramo. En la figura (c), las dos fuerzas mencionadas, de 15 y 20 N, actúan formando un ángulo de 60° entre sí. La fuerza resultante, calculada por el método del paralelogramo, es de 30.4 N a 34.7°.




(c) Fuerzas que actúan a un ángulo de 60° entre sí.

**Trigonometría y vectores**

El tratamiento gráfico de los vectores es conveniente para visualizar las fuerzas, pero con frecuencia no es muy preciso. Un método mucho más útil consiste en aprovechar la trigonometría del triángulo rectángulo.
Los métodos trigonométricos pueden mejorar la precisión y la rapidez al determinar el vector resultante o para encontrar las componentes de un vector. En la mayoría de los casos, es útil utilizar ejes $x$ y $y$ imaginarios cuando se trabaja con vectores en forma analítica. Cualquier vector puede dibujarse haciendo coincidir su origen con el cruce de esas rectas imaginarias. Las componentes del vector pueden verse como efectos a lo largo de los ejes $x$ y $y$.

**Ejemplo**
¿Cuáles son las componentes $x$ y $y$ de una fuerza de 200 N, con un ángulo de 60°?

Dibuje el diagrama de vectores usando la trigonometría para encontrar las componentes.
Solución: Se dibuja un diagrama ubicando el origen del vector de 200 N en el centro de los ejes $x$ y $y$ como se muestra en la figura.
En primer lugar, se calcula la componente $x$, o sea $F_x$, tomando en cuenta que se trata del lado adyacente. El vector de 200 N es la hipotenusa. Si se usa la función coseno, se obtiene

$$\cos 60° = \frac{F_x}{200\text{ N}}$$

por lo cual

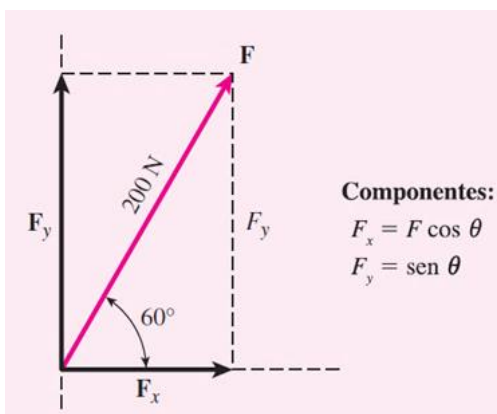
$$F_x = (200\text{ N})\cos 60° = 100\text{ N}$$

Para estos cálculos notamos que el lado opuesto a 60° es igual en longitud a $F_y$. Por consiguiente, escribimos

$$\text{sen } 60° = \frac{F_y}{200\text{ N}}$$

o bien

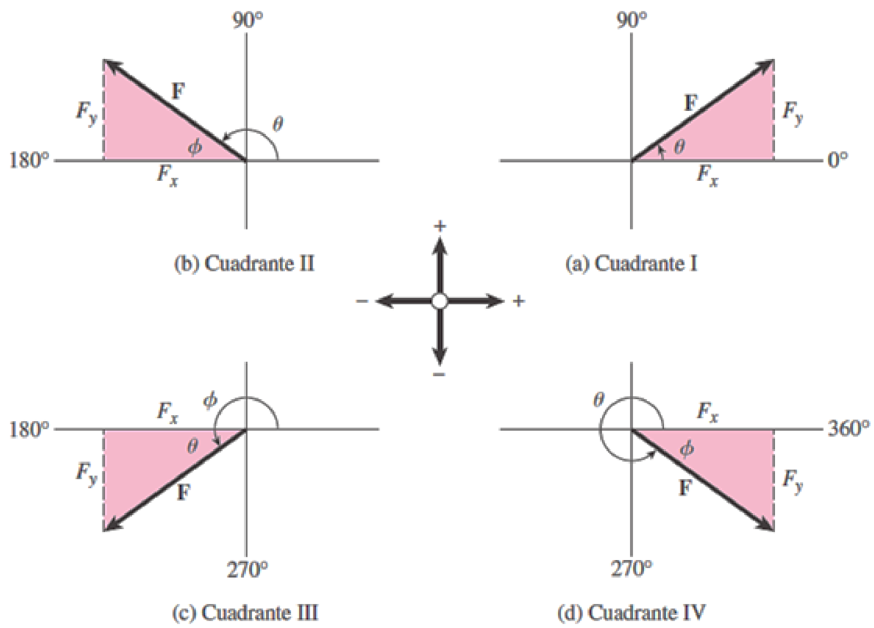
$$F_y = (200\text{ N})\text{ sen } 60° = 173\text{ N}$$




En general, podemos escribir las componentes $x$ y $y$ de un vector en términos de su magnitud $F$ y su dirección $\theta$:

$$F_y = F\text{ sen }\theta$$
$$F_x = F\cos\theta \qquad \text{Componentes de un vector}$$

donde $\theta$ es el ángulo entre el vector y el lado positivo del eje $x$, medido en contrasentido a las manecillas del reloj.
El signo de una componente dada se determina a partir de un diagrama de vectores. Las cuatro posibilidades se presentan en la figura siguiente. Además del ángulo polar $\theta$, se muestra el ángulo de referencia $\phi$ para cada cuadrante. Cuando el ángulo polar es mayor de 90°, es más fácil ver las direcciones de las componentes si se trabaja con el ángulo de referencia $\phi$.
Las aplicaciones de la trigonometría que utilizan el ángulo polar $\theta$ también darán los signos correctos, pero siempre es útil verificar visualmente la dirección de las componentes.




(a) En el primer cuadrante, el ángulo u está entre 0° y 90°; tanto $F_x$ como $F_y$ son positivas. (b) En el segundo cuadrante el ángulo θ está entre 90 y 180; $F_x$ es negativa y $F_y$ es positiva. (c) En el tercer cuadrante, el ángulo u está entre 180° y 270°; tanto $F_x$ como $F_y$ son negativas. (d) En el cuarto cuadrante, el ángulo θ está entre 270° y 360°; $F_x$ es positiva y $F_y$ es negativa.

**Ejemplo**

Encuentre las componentes $x$ y $y$ de una fuerza de 400 N a un ángulo polar θ de 220° a partir del eje $x$ positivo.

Dibuje el vector y sus componentes indicando tanto el ángulo de referencia como el ángulo polar. Use la trigonometría para encontrar las componentes.

Consulte la figura anterior donde podemos obtener el ángulo de referencia ϕ como sigue:

$$\phi = 220° - 180° = 40°$$

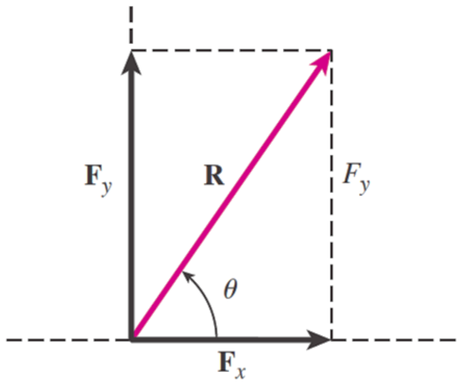
En la figura se observa que ambas componentes $F_x$ y $F_y$ son negativas.

$$\begin{aligned} F_x &= -|F\cos\phi| = -(400\text{ N})\cos 40° \\ &= -306\text{ N} \\ F_y &= -|F\,\text{sen}\,\phi| = -(400\text{ N})\,\text{sen}\,40° \\ &= -257\text{ N} \end{aligned}$$

Note que los signos se determinaron a partir de la figura anterior. Con las calculadoras electrónicas tanto la magnitud como el signo de $F_x$ y $F_y$ se obtienen en forma directa, utilizando el ángulo polar θ = 220°. Compruebe este hecho.

La trigonometría también es útil para calcular la fuerza resultante. En el caso especial en que dos fuerzas $F_x$ y $F_y$ son perpendiculares entre sí, como se observa en la figura siguiente, la resultante ($R$, θ) se puede hallar a partir de

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$




**Resultante** $(R, \theta)$:

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

*La resultante de dos vectores perpendiculares.*

Si $F_x$ o $F_y$ es negativa, generalmente es más fácil determinar el ángulo agudo $\phi$ como se indica en la figura anterior. El signo (o dirección) de las fuerzas $F_x$ y $F_y$ determina cuál de los cuatro cuadrantes se va a usar. Entonces, la ecuación anterior se convierte en

$$\tan \phi = \left|\frac{F_y}{F_x}\right|$$

Sólo se necesitan los valores absolutos de $F_x$ y $F_y$. Si se desea, se puede determinar el ángulo $\theta$ del eje $x$ positivo. En cualquiera de los casos se debe identificar claramente la dirección.

**Ejemplo**
¿Cuál es la resultante de una fuerza de 5 N dirigida horizontalmente a la derecha y una fuerza de 12 N dirigida verticalmente hacia abajo?

Como las fuerzas son hacia la derecha y hacia abajo, dibujamos un diagrama de vectores de cuatro cuadrantes. Aplique la ecuación respectiva para hallar la resultante.
Solución: Trate los dos vectores fuerza como componentes $F_x$ = 65 N y $F_y$ = -12 N de la fuerza resultante $R$. Por tanto, la magnitud de $R$ se vuelve

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5\text{ N})^2 + (-12\text{ N})^2}$$
$$= \sqrt{169\text{ N}^2} = 13.0\text{ N}$$

Para encontrar la dirección de $R$, primero se determina el ángulo de referencia $\phi$:

$$\tan \phi = \left|\frac{-12\text{ N}}{5\text{ N}}\right| = 2.40$$
$$\phi = 67.4^\circ\text{ S del E}$$

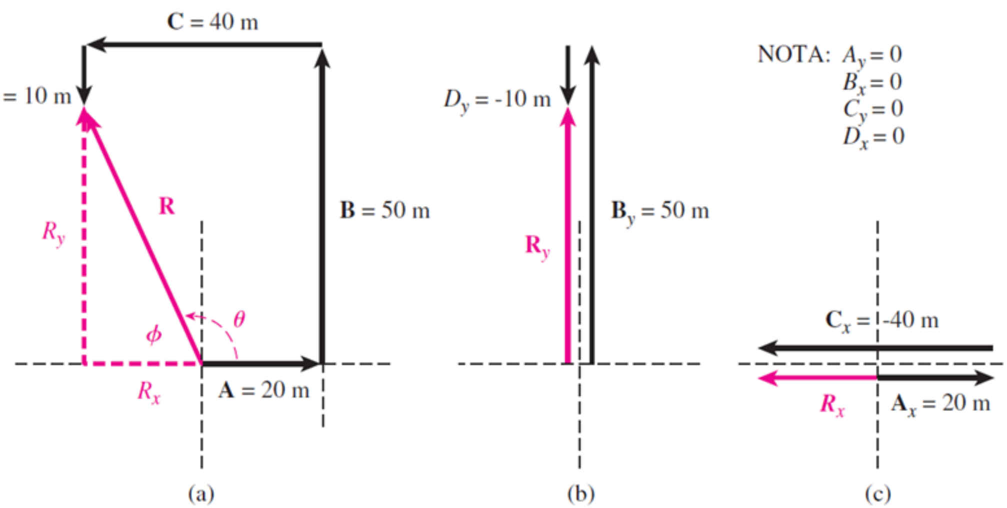
El ángulo polar u medido en contrasentido a las manecillas del reloj a partir del eje x positivo es

$$\theta = 360^\circ - 67.4^\circ = 292.6^\circ$$

La fuerza resultante es 13.0 N a 292.6°.

**El método de las componentes para la suma o adición de vectores**

Con frecuencia es necesario sumar una serie de desplazamientos o encontrar la resultante de varias fuerzas usando métodos matemáticos. En tales casos, uno debe comenzar con un bosquejo gráfico usando el método del polígono para la suma de vectores. Sin embargo, como la trigonometría se usará para asegurar que los resultados finales sean precisos, sólo se necesita estimar las longitudes de cada vector. Por ejemplo, un desplazamiento de 60 m o una fuerza de 60 N deben dibujarse como un vector con una longitud aproximadamente tres veces mayor que el vector para un desplazamiento de 20 m o una fuerza de 20 N. Los ángulos dados también deben estimarse. Los vectores de 30°, 160°, 240° o 324° deben dibujarse en los cuadrantes adecuados y con una dirección lo más cercana posible a la dirección real. Estos diagramas aproximados le dan una idea de la dirección de la resultante antes de hacer los cálculos, así que es conveniente que aprenda a dibujarlos rápido.




La componente $x$ del vector resultante es igual a la suma de las componentes x de cada vector.
La componente y de la resultante es igual a la suma de las componentes $y$.

Resulta útil reconocer que la componente $x$ de la resultante o la suma de una serie de vectores está dada por la suma de las componentes $x$ de cada vector. Asimismo, la componente $y$ de la resultante es la suma de las componentes $y$. Suponga que quiere sumar los vectores $A$, $B$, $C$,... para encontrar su resultante **R**. Se podría escribir

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \ldots$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y + \ldots$$

La magnitud de la resultante $R$ y su dirección $\theta$ pueden obtenerse a partir de la ecuación anterior.
El ejemplo siguiente ilustra el método de las componentes de la suma de vectores. Suponga que un topógrafo camina 20 m, E; 50 m, N; 40 m, O, y 10 m, S. Nuestro objetivo es hallar el desplazamiento resultante.
Primero, se dibuja cada vector a una escala aproximada utilizando el método del polígono.
De esa manera, a partir de la figura anterior se observa que la resultante **R** debe estar en el segundo cuadrante. En este problema la obtención de las componentes de cada vector es simple, ya que cada vector yace completamente sobre un eje dado así que dicha componente es cero en cada caso. Note que las componentes son positivas o negativas, mientras que las magnitudes de los vectores siempre son positivas. A veces es recomendable elaborar una tabla de componentes, como la tabla siguiente, donde se incluya para cada vector su magnitud, el ángulo de referencia y las componentes $x$ y $y$.

## Tabla de componentes

| Vector | Ángulo $\theta$ | Componente $x$ | Componente $y$ |
|---|---|---|---|
| $A = 20$ m | 0° | $A_x = +20$ m | $A_y = 0$ |
| $B = 50$ m | 90° | $B_x = 0$ | $B_y = +50$ m |
| $C = 40$ m | 180° | $C_x = -40$ m | $C_y = 0$ |
| $D = 10$ m | 270° | $D_x = 0$ | $D_y = -10$ m |
| $R$ | $\theta$ | $R_x = \Sigma F_x = -20$ m | $R_y = \Sigma F_y = +40$ m |

Observe detenidamente en la fi gura 3.19 la representación de cada una de estas componentes.
Es fácil ver el significado de la componente $x$ neta y de la componente y neta.
La resultante ahora puede obtenerse a partir de las componentes $R_x$ y $R_y$ del vector resultante.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20\text{ m})^2 + (40\text{ m})^2}$$
$$R = \sqrt{400\text{ m}^2 + 1600\text{ m}^2} = \sqrt{2000\text{ m}^2};\ R = 44.7\text{ m}$$

Por tanto, la dirección puede obtenerse a partir de la función tangente.

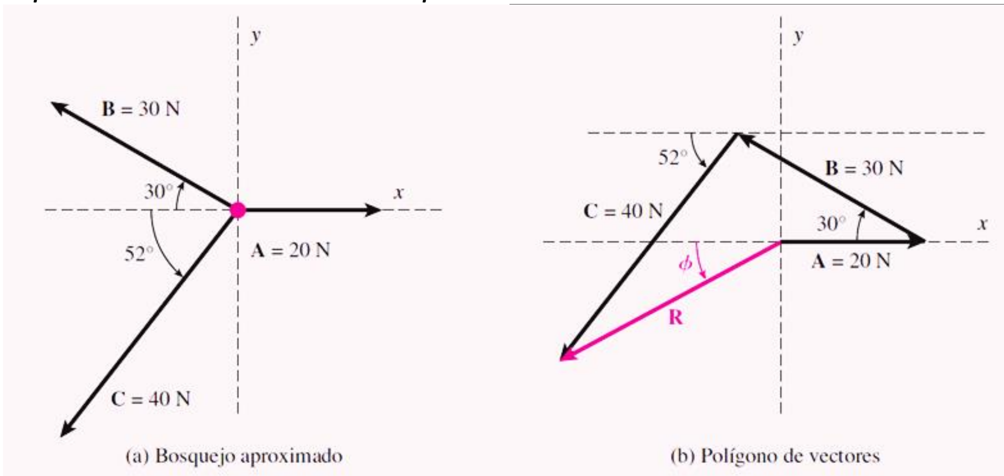
$$\tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{40\text{ m}}{-20\text{ m}}\right| = 2.00$$
$$\phi = 63.4°\text{ N del O (o }116.6°)$$

El procedimiento que se siguió en el ejemplo anterior también puede utilizarse para resolver problemas más generales que involucran vectores que no están sobre ejes perpendiculares.
Recuerde que las componentes se obtienen usando las funciones seno y coseno, y que a estas componentes se deben asignar signos algebraicos adecuados antes de hacer la suma.

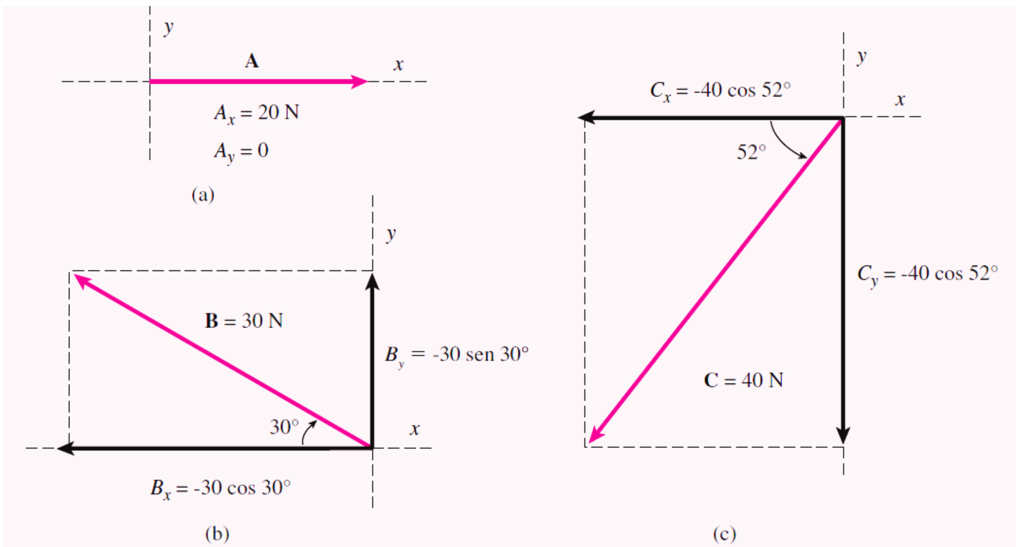
**Ejemplo**
Tres sogas están atadas a una estaca, y sobre ella actúan tres fuerzas: $A$ = 20 N, E; $B$ = 30 N, 30° N del O; y $C$ = 40 N, 52° S del O. Determine la fuerza resultante usando el método de las componentes.

Plan: Dibujaremos un bosquejo aproximado del problema como se muestra en la figura. Las fuerzas se representan como vectores proporcionales y sus direcciones se indican por medio de ángulos con respecto al eje $x$. Por tanto, obtendremos la fuerza resultante por medio de la estrategia para resolver problemas.

1. Dibuje un polígono proporcional con los vectores, sumando las fuerzas como en la figura (b). Se estima que la resultante debe estar en el tercer cuadrante.




2. Elabore una tabla de las componentes *x* y *y* para cada vector. Note en la figura siguiente que los ángulos de referencia ϕ se determinan a partir de los ejes *x* para efectos de trigonometría.




Se debe tener cuidado al incluir el signo correcto de cada componente. Por ejemplo, $B_x$, $C_x$ *y* $C_y$ todas son negativas. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

**Tabla de componentes**

| Vector | Ángulo $\phi_x$ | Componente *x* | Componente *y* |
|---|---|---|---|
| $A = 20$ N | 0° | $A_x = +20$ N | $A_y = 0$ |
| $B = 30$ N | 30° | $B_x = -(30\text{ N})(\cos 30°)$ <br> $= -26.0$ N | $B_y = (30\text{ N})(\text{sen } 30°)$ <br> $= 15.0$ N |
| $C = 40$ N | 52° | $C_x = -(40\text{ N})(\cos 52°)$ <br> $= -24.6$ N | $C_y = -(40\text{ N})(\text{sen } 52°)$ <br> $= -31.5$ N |
| $R$ | $\theta$ | $R_x = \Sigma F_x = -30.6$ N | $R_y = \Sigma F_y = -16.5$ N |

3. Sume las componentes x para obtener *Rx:* $R_x = A_x + B_x + C_x$

$$R_x = 20.0\text{ N} - 26.0\text{ N} - 24.6\text{ N};\ R_x = -30.6\text{ N}$$

4. Sume las componentes y para obtener $R_y$: $R_y = A_y + B_y + C_y$

$$R_y = 0 \text{ N} + 15.0 \text{ N} - 31.5 \text{ N}; \; R_y = -16.5 \text{ N}$$

5. Ahora encuentre $R$ y $\theta$ a partir de $R_x$ y $R_y$

Una figura independiente (véase la figura siguiente) a menudo es útil en el cálculo de la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

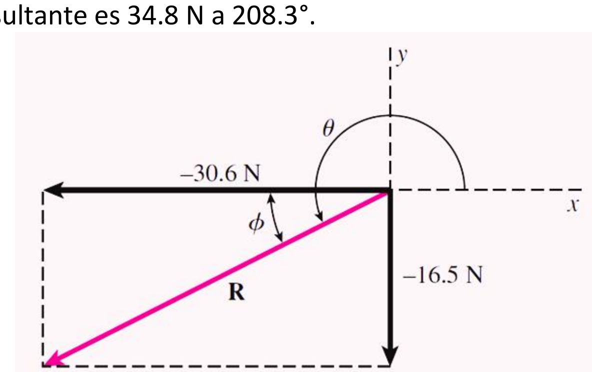
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-30.6 \text{ N})^2 + (-16.5 \text{ N})^2}; \qquad R = 34.8 \text{ N}$$

A continuación, la dirección se puede encontrar a partir de la dirección tangente.

$$\tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{-16.5 \text{ N}}{-30.6 \text{ N}}\right| = 0.539$$

$$\phi = 28.3° \text{ S del O} \qquad \text{o} \qquad 180° - 28.3° = 208.3°$$

Por consiguiente, la fuerza resultante es 34.8 N a 208.3°.



**Anexo 3. Examen**

El siguiente documento te ayudará a prepararte para tu examen extraordinario. Se te recomienda resolverlo una vez que hayas contestado los cuestionarios y resuelto los problemas planteados para cada tema de esta guía. Posteriormente, acude con un Profesor de Física para que revise tus respuestas, te haga las observaciones necesarias y te aclare las dudas que tengas. El examen que se te aplicará no excluye los conceptos y problemas no presentados en este ejercicio.

# Ejemplo de Examen Extraordinario de Física III

**Preguntas.**

**I. Marca un solo inciso, el que conteste correctamente la pregunta planteada. Valor: 0.2 puntos cada una.**

1. ¿Cómo se denomina al punto en el cual se considera concentrada toda la masa de un objeto o sistema?

a) Centroide
b) Centro de gravedad
c) Centro de masa
d) Centro de equilibrio

2. ¿Cómo se denomina a la razón del cambio de desplazamiento angular en el tiempo transcurrido?

a) Velocidad tangencial
b) Velocidad radial
c) Velocidad angular
d) Velocidad lineal

3. ¿Qué magnitud define la rapidez con que se realiza un trabajo rotacional?

a) Energía rotacional
b) Velocidad rotacional
c) Aceleración rotacional
d) Potencia rotacional

4. ¿Qué propiedad de los fluidos se refiere a la cantidad de masa contenida en cierto volumen?

a) Viscosidad
b) Densidad absoluta
c) Tensión superficial
d) Presión manométrica

5. ¿Qué principio de la hidrostática se aplica en la prensa hidráulica?

a) Arquímedes
b) Torricelli
c) Pascal
d) Bernoulli

**II. Anota en el paréntesis V si es verdadero o F si es falso el texto planteado. Valor: 0.2 Puntos cada una.**

6. ( ) El peso de un objeto es el mismo a cualquier altura sobre la superficie de la Tierra.

7. ( ) La fuerza centrípeta es tangencial al movimiento circular de un objeto.

8. ( ) Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional cuando la suma de las fuerzas que actúan en este es igual a cero

9. ( ) A mayor profundidad en un fluido en reposo la presión disminuye.

10. ( ) Cuando un fluido se mueve dentro de un conducto cerrado al aumentar su velocidad disminuye su presión

**III. En cada una de las siguientes frases se encuentran subrayadas dos palabras, una de estas es correcta. Cancela con una X sobre la palabra que no corresponda al texto. Valor: 0.2 puntos cada una.**

11. La fuerza **centrípeta**, **centrífuga** es aquella dirigida hacia el centro del movimiento circular uniforme.

12. El brazo de **torsión, palanca** es la distancia del eje de giro al punto de aplicación de una fuerza que produce una rotación en un cuerpo.

13. La cantidad de movimiento angular es igual al producto de la velocidad angular del cuerpo por su **momento de inercia**, **aceleración angular.**

14. La presión **hidrostática, absoluta** es la suma de la presión atmosférica más la manométrica.

15. El gasto **másico, volumétrico** es la cantidad de volumen que pasa por un punto dentro de una tubería en la unidad de tiempo.

**IV. Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis el inciso correcto. Valor: 0.2 puntos cada una.**

16. Es el punto donde se equilibran los momentos de torsión o torcas de un cuerpo. ( )

17. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. ( )

18. Es la fuerza dirigida hacia el centro de giro que se requiere para mantener el movimiento circular uniforme. ( )

19. Es la presión en el interior de un recipiente cerrado. ( )

20. Es el flujo caótico en el interior de un conducto. ( )

(a) Turbulento.

(b) Ley de la gravitación Universal

(c ) Centro de gravedad

(d) Primera ley de Kepler

(e ) Centro de masa

(f) Laminar

(g) Centrípeta

(h) Manométrica

**<u>PROBLEMAS</u>. Indispensable incluir datos, ecuación, sustitución con unidades en el Sistema Internacional y resultado.**

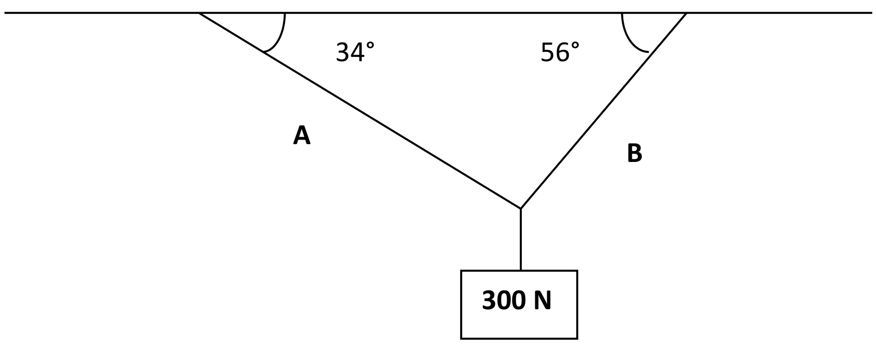
**Elige y resuelve sólo cuatro de los siguientes problemas planteados. Valor: 1 punto cada uno.**

a) Una persona de 60 kg se encuentra en un juego mecánico circular de 6 m de diámetro, que gira a razón de media vuelta por segundo. ¿Cuál es el valor de la fuerza que lo mantiene dentro del juego?

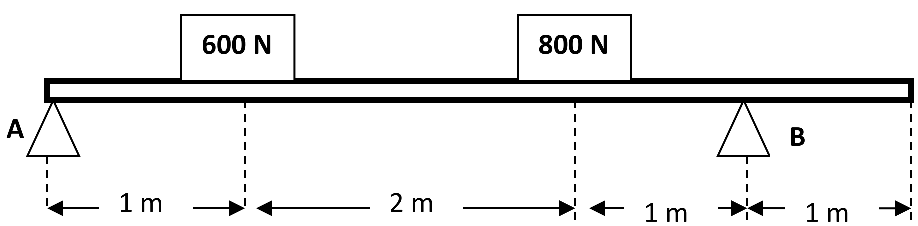
b) Una masa de 500 g está colocada a 2 m de una masa de 300 g ¿Cuál es la fuerza gravitacional resultante sobre una masa de 250 g colocada en el punto medio de una recta que une las dos primeras masas?

c) Cinco objetos tienen las siguientes masas y coordenadas de sus centros de masa (1) 3 kg, (1, 3) m, (2) 2 kg, (-1, 4) m; (3) 6 kg, (3, -6) m; (4) 4 kg, (-2, 3) m; (5) 3 kg, (-3, -2)m. ¿Qué coordenadas tiene el centro de masas del sistema?

d) Determina el valor de la tensión en las cuerdas A y B del sistema en equilibrio mostrado.




e) Determina el valor de la reacción en los apoyos A y B de la viga de 200 N de peso que sostiene un objeto de 600 N y otro de 800 N como se muestra en la figura.




f) Una polea motriz gira a 900 rpm. ¿Cuál es su velocidad angular? ¿Cuál es el desplazamiento angular después de 30 segundos?

g) Una rueda de esmeril de 40 cm de diámetro gira inicialmente a 600 rpm. Luego se detiene por completo después de 50 revoluciones. ¿Cuáles fueron la aceleración angular y el tiempo en que se detiene?

h) Un cilindro sólido de 6 kg tiene 50 cm de diámetro y gira a 750 rev/min. ¿Qué fuerza de frenado se deberá aplicar tangencialmente al disco para detener su movimiento de rotación en 6 s?

i) Un motor de 1000 W impulsa una rueda en forma de aro de 60 cm de diámetro y 2 kg. Si parte del reposo ¿cuál será su velocidad angular después de 15 segundos?

j) Una canica de 100g y 2 cm de radio se hace rodar desde la base de un plano inclinado. Si su velocidad lineal es 2 m/s ¿cuál será la altura alcanzada?

**1. Elije y resuelve sólo dos de los siguientes problemas planteados. Valor: 1 punto cada uno.**

k) ¿Qué fuerza debe aplicarse sobre un émbolo de 5 cm de radio de un cilindro de una prensa hidráulica conectado a otro cilindro con un émbolo de 10 cm de radio para que eleve objeto de 300 kg?

l) Un trozo de metal de 20 gramos con densidad de 4000 $kg/m^3$ está atado a un hilo delgado y se sumerge completamente en un aceite con densidad de 1500 $kg/m^3$. ¿Cuál es la tensión en el hilo?

m) Una tubería horizontal tiene un radio de 10 cm en la entrada y un radio de 5 cm en la salida. Si un fluido entra con 2 m/s, ¿con qué velocidad sale?

n) A 3 m por debajo de la superficie del nivel del agua contenida en un depósito se encuentra un orificio de 1 cm de radio ¿Cuánto volumen escapará en 5 minutos?

**Bibliografía**

**Unidad 1. Sistemas de cuerpos rígidos**

Gutiérrez, C. (2009). Física general, capítulos 12 y 13. México: Mc Graw Hill.
Haliday, D., Resnick, R. y Walker, J. (2011). Fundamentos de física, Volumen 1. Octava edición. México: Grupo Editorial Patria.
Jones, E y Childers, R. (2001). Física contemporánea, capítulo 10, tercera edición. México: Mc Graw Hill.
Serway, R. y Faughn, J. (2001). Física, capítulo 9, quinta edición. México: Pearson educación.
Tippens, Paul E. (2011). Física. Conceptos y aplicaciones, capítulo 15, págs. 301–328, séptima edición. México: Mc Graw Hill.
Wilson, J., Buffa, A. y Lou, B. (2007). Física, capítulo 7 y 8, sexta edición. México: Pearson Educación.

**Unidad 2. Sistemas de fluidos**

Haliday, D., Resnick, R. y Walker, J. (2011). Fundamentos de física, Volumen 1. Octava edición. México: Grupo Editorial Patria.
Jones, E y Childers, R. (2001). Física contemporánea, capítulo 10, tercera edición. México: Mc Graw Hill.
Serway, R. y Faughn, J. (2001). Física, capítulo 9, quinta edición. México: Pearson educación.
Tippens, Paul E. (2011). Física. Conceptos y aplicaciones, capítulo 15, págs. 301–328, séptima edición. México: Mc Graw Hill.
Wilson, J., Buffa, A. y Lou, B. (2007). Física, capítulo 7 y 8, sexta edición. México: Pearson Educación.