CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Ubicación del curso

En esta asignatura se concluye el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del Cálculo Diferencial e Integral: se desarrolla el concepto de derivada de algunas funciones trascendentes y se concretan las ideas fundamentales del cálculo integral. Para darle sentido a sus conceptos, se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionarán las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

En la primera unidad se extiende el estudio de la variación a algunas funciones trascendentes al obtener la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; la justificación de estos resultados se realiza fundamentalmente con el análisis gráfico de la función original y sus dos primeras derivadas. Con base en la modelación de diversos fenómenos físicos, químicos biológicos y sociales, entre otros, se contribuye a una mejor comprensión de la derivada de las funciones antes mencionadas, a la vez que se enriquece el significado del concepto de derivada.

A partir de la modelación de situaciones geométricas y de contextos, principalmente de movimiento, en la que se presenta la idea de acumulación, en la unidad dos se inicia el estudio del concepto de integral definida; es importante recurrir a los procesos infinitos para esbozar la definición de integral definida. Para la obtención de resultados de sumas infinitas debe recurrirse a las funciones constante y lineal, principalmente. Con base en estos resultados, aportar elementos para presentar el teorema fundamental del cálculo.

La unidad tres inicia con la presentación del desarrollo inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función a partir de conocer su rapidez de cambio. Para la comprensión de las ideas de antiderivada, condición inicial e integral indefinida, el trabajo con funciones polinomiales debe ser el punto de partida. Se prepara al alumno en el manejo algorítmico al resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas, para concluir con los métodos de sustitución e integración por partes. Al retomar los resultados que presenta el Teorema Fundamental del Cálculo resuelve problemas de mayor complejidad, que requieren utilizar la integral definida.

Por último, la cuarta unidad presenta tanto la conclusión de los dos cursos como perspectivas de desarrollo de los métodos y conceptos estudiados. Consolida la comprensión, manejo y aplicación de la derivada y la integral al construir el modelo asociado a diversas situaciones, en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como crecimiento de una población, desintegración radioactiva, ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo propagación de una enfermedad.

En la siguiente tabla se presentan tanto los propósitos y como el número de horas de cada una de las unidades.

Cálculo Diferencial e Integral II

No	Nombre de la unidad	Propósitos	Horas
1	Derivadas de funciones trascendentes.	Al finalizar la unidad el alumno ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelan con ellas.	16
2	La integral definida.	Al finalizar la unidad el alumno interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del teorema fundamental del cálculo y lo aplicará.	16
3	La integral indefinida.	Al finalizar la unidad el alumno establecerá mediante el análisis de situaciones de variación, la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.	20
4	Modelos y predicción.	Al finalizar la unidad el alumno concluirá el estudio de la derivada e integral con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	12

Evaluación

Las propuestas de los métodos de evaluación, que tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado. Un ejemplo de evaluación consiste en que el alumno elabore un portafolio que contenga las actividades llevadas a cabo, los exámenes, proyectos, trabajos, tareas, entre otros; realizados a lo largo del curso o por unidad. Por lo cual es indispensable que el alumno se involucre en el trabajo en clase.

Propósitos del curso

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral II, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades, procedimientos y a la comprensión de conceptos y métodos, el alumno:

- Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al apropiarse de nuevas técnicas y herramientas que proporciona el cálculo, en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Avanzará en la comprensión de la derivada, al analizarla en situaciones que es posible modelar con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Comprenderá la relación entre la derivada y la integral de funciones, que se sintetiza en el teorema fundamental del cálculo.
- Manipulará adecuadamente las fórmulas de integración y los métodos de sustitución e integración por partes.
- Con la modelación de situaciones geométricas y de movimiento, entre otras, relacionará a la integral definida de una función, ya sea con el área bajo una curva o la descripción del comportamiento de un objeto en movimiento, y comprenderá que puede llevarse a cabo mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- Sistematizará las diversas interpretaciones de la integral y las utilizará en la resolución de problemas relacionados con variación y con acumulación.

Unidad 1. Derivada de funciones trascendentes

Propósitos:	
Al finalizar la unidad el alumno: • Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. • Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica. • Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. • Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas. • Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos.	**Derivada de funciones trigonométricas:** • Funciones trigonométricas y el estudio de su variación. • Derivada de las funciones seno y coseno. • Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. • Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas. • Resolución de problemas en diversos contextos.	• Para la deducción de la derivada de cada una de las funciones es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular o algebraica, considerando lo siguiente: - Aprovechando el conocimiento obtenido en la Unidad IV de Cálculo I, realiza una primera conjetura de la gráfica de la derivada de las funciones seno y coseno. - En la representación numérica se sugiere calcular la aproximación de la derivada, usando una tabla, para valores apropiados. • Presentar situaciones que se modelen mediante estas funciones para motivar la discusión de su variación. Por ejemplo: - La profundidad del agua en el puerto de San Felipe B. C. está dada por la función: $y = 3 + 2.5\cos(\pi/6\ t)$; y está en metros Donde t es el número de horas desde la media noche. Calcular la rapidez con que está cambiando el nivel del agua a las 6 horas. - Se depositan cien mil pesos en un banco que paga 5% de interés anual compuesto de manera continua. Suponiendo que se reinvierte el capital más los intereses. Calcula lo que se solicita. *a)* Encuentra la cantidad total acumulada en 10 años. *b)* Con qué rapidez está creciendo el capital a los 10 años.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• Calcular mediante una aproximación numérica los límites siguientes: $$\lim_{x \to 0} \frac{sen x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$ para encontrar la derivada de seno y coseno en x = 0. • Presentar problemas que se puedan modelar mediante funciones circulares para el estudio de la variación de fenómenos periódicos, como: el péndulo simple, pistón oscilante, el movimiento de las mareas, etcétera. • Promover que el alumno, con el apoyo de la geometría dinámica, conjeture que la derivada de la función exponencial natural es la misma función.
• Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.		• Si se utiliza la definición de la derivada de la función exponencial sería conveniente calcular mediante una aproximación numérica este límite: $$\lim_{h \to 0} \left[\frac{e^h - 1}{h} \right]$$
• Infiere la derivada de las funciones logarítmicas.	**Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas:**	• Resaltar la importancia de la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento.
• Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.	• Derivada de las funciones: e^x, e^u, 10^x y 10^u • Derivada de las funciones: $\ln x$, $\ln u$, $\log x$, $\log u$	• Se sugiere que la derivada de la función logarítmica sea a través de la función $y = e^x$ • Enfatizar las aplicaciones a diversas disciplinas, como: el decaimiento radioactivo, crecimiento de poblaciones, la ley de enfriamiento, entre otras.
• Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.	• Resolución de problemas en diversos contextos	• Resaltar el hecho de que el aplicar las propiedades de los logaritmos facilita la obtención de las derivadas de productos, cocientes, potencias y exponenciales.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 4;

(3) Lección 16;

(9) Capítulo 5;

(11) Capítulos 2 y 5;

(15) Capítulo 6;

(18) Capítulos 2 y 3;

(21) Capítulo 4.

Unidad 2. La integral definida

Propósitos:	
Al finalizar la unidad el alumno: • Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno:	**El área bajo una curva:**	
• Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos.	• El área bajo la gráfica de una función constante o lineal.	• Introducir situaciones problemáticas en las que se conoce la velocidad o la tasa instantánea de cambio para motivar la discusión de la acumulación. • Desarrollar problemas que involucren el cálculo de distancia, trabajo o presión, entre otros los cuales se representen mediante una función constante o lineal para que, posteriormente, los analicen gráficamente y perciban que dichos problemas se pueden resolver al calcular el área bajo la gráfica de esa función, auxiliándose de la figura geométrica respectiva.
• Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general.	• Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. • Cálculo del área para funciones de la forma $f(x)=kx^n$ donde k es una constante.	
• Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito.	• Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva.	
• Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x)=x^n$ como un límite de sumas infinitas para *n=1, 2 y 3.*	**La integral definida:** • Definición. • Propiedades.	• Para la aproximación numérica, presentar la gráfica de una función positiva sin su representación analítica y solicitarles que calculen el área bajo la curva en un intervalo dado, inducirlos a que obtengan una aproximación del área a través de la suma de las áreas de figuras rectilíneas y solicitarles mejores aproximaciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma [*0,x*] y calcula con ella el área en el intervalo [a,b].	**La función área como una antiderivada:**	
• Identifica la función área como una antiderivada o primitiva. • Infiere a la integral definida como el límite de sumas infinitas. • Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo. • Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.	**Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo:**	• Determinar el área bajo las funciones $f(x)=x^n$ *para* $n=1, 2, 3$. En un intervalo [0,a], a partir de aproximar el área mediante rectángulos inscritos y circunscritos con bases de igual longitud, para acotar el área. Se puede iniciar circunscribiendo n rectángulos para n=4 y calcular su área, continuar con n=5, 6, etcétera y observar el patrón de comportamiento del área conforme n crece. • Para enriquecer lo anterior, realizar el cálculo con particiones más finas utilizando una hoja electrónica de cálculo. Complementar y verificar los valores obtenidos con el uso de software dinámico, observando gráficamente cómo se pueden obtener mejores aproximaciones.
• Utiliza las propiedades de la integral definida.	**Aplicaciones de la integral definida:** • Área comprendida entre dos funciones. • Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.	• Señalar que las unidades asociadas a la integral definida es el producto de las unidades de la variable dependiente y las unidades de la variable independiente.
• Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo. • Aplica el teorema fundamental del cálculo.	• Cálculo de una población a partir de su tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.	• Para calcular de manera exacta las áreas referidas, analizar el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para determinar si tiene un valor límite y cuál es éste.
• Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.		• En la representación del área desde *a* hasta *x* bajo la gráfica de *f(t),* incorporar la notación $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• Resaltar la importancia de la continuidad de las funciones para enunciar el TFC, a partir de que analicen una integral como: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ • A partir de los resultados anteriores analizar la relación entre: la función área, la antiderivada y la integral definida; para enunciar el teorema fundamental del cálculo (TFC). • Proponer problemas que incluyan áreas entre dos funciones, cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad, apoyándose en el trazo de sus gráficas para calcular las integrales respectivas.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 5;

(5) Capítulo 5;

(7) Capítulo 5;

(10) Capítulo 7;

(15) Capítulo 4;

(18) Capítulo **5;**

(19) Capítulo 17;

(21) Capítulo 6.

Unidad 3. La integral indefinida

Propósitos:	Tiempo:
Al finalizar la unidad el alumno: • Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración	20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación	**Fórmulas inmediatas de integración.**	• Usar la idea de que la derivada y la integral son operaciones inversas para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Retomar el análisis gráfico como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de funciones y resaltar el papel que juega en ella la constante de integración. Se recomienda utilizar algún software graficador.
• Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren. • Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada. • Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales.	**Relación entre la condición inicial y la constante de integración.**	• Para ilustrar el método de cambio de variable se sugiere realizar modificaciones a la función a integrar y solicitar al alumno identifique la diferencial para obtener la integral de una forma inmediata.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. • Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla. • Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones.	**Métodos de integración:** • Cambio de variable. • Integración por partes.	• En la integración por partes proporcionarles algunas sugerencias para la elección de ***u*** y ***v***, presentar algunos ejemplos invirtiendo la elección y discutir cuál de ellas es la adecuada. • Es importante hacer ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. También retomar alguno de los problemas sobre distancia, trabajo o presión resueltos anteriormente y proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.
• Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.	**Problemas de aplicación en diferentes contextos.**	

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 5;

(7) Capítulo 7;

(9) Capítulo 4;

(20) Capítulo 18.

Unidad 4. Modelos y predicción

Propósito:	
Al finalizar la unidad el alumno: • Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	**Tiempo:** 12 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ • Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos. • Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de C.	• Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ • Método de separación de variables. • Condiciones iniciales aplicadas al modelo $P(t) = Ce^{kt}$	• Propiciar que los alumnos, exploren en forma numérica, gráfica o algebraica el comportamiento de diversas situaciones. • Por ejemplo, en el crecimiento de una población, orientarlos a que propongan los elementos que intervienen en su crecimiento, al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, arribar a la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Por lo cual, se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante la ecuación diferencial: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación, dada y llega a un modelo del tipo $p(t)=P_0e^{kt}$ • Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. • Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t)=P_0e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. • Reconoce la importancia del modelo $p(t)=P_0e^{kt}$.		• Al presentar el método de separación de variables, cuidar que los alumnos no se queden con la idea errónea de que *dt* pasa multiplicando pero sin caer en explicaciones teóricas que excedan los propósitos de esta unidad. • Una vez hallada la solución, analizar su comportamiento general y efectuar predicciones. • Es recomendable contar con datos de fácil acceso, por ejemplo, los del INEGI del último censo sobre la tasa de crecimiento de la población del país.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(5) Capítulo 10;

(6) Capítulo 7;

(7) Capítulo 10;

(9) Capítulo 6;

(21) Capítulo 7.

Referencias:

1. Azcárate, Carmen, *et al.* (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.
2. Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison Wesley.
3. Cruse, Allan B. *et al.* (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano.
4. Filloy, Eugenio, *et al.* (2003). *Matemática Educativa. "El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial".* México: Fondo de Cultura Económica.
5. Goldstein, L. J. *et al.* (1990). *Cálculo y sus aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana.
6. Hoffmann, L. *et al.* (1995). *Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. Quinta edición. Cali, Colombia: McGraw Hill.
7. Hughes, Deborah, *et al*. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA.
8. Imaz, Carlos. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo*. México: Trillas.
9. Larson, Ron, *et al.* (2010). *Cálculo 1.* Novena edición. México: McGraw–Hill.
10. Leithold, Louis. (1988). *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*. México: Alfaomega grupo editor.
11. Leithold, Louis. (1998). *El cálculo.* Séptima edición. México: Oxford University Press.
12. Mochón, Simón. (1994). *Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
13. Natanson, I. P. (1984). *La suma de cantidades infinitamente pequeñas*. México: Limusa–Willey.
14. Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
15. Purcel, Edwin J. *et al*. (2007). *Cálculo*. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall.
16. Shilov, G. E. (1980). *Cómo construir gráficas: Los problemas más sencillos de máximos y mínimos.* México: Limusa.
17. Stewart, James, *et al.* (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo.* Sexta edición. México: CENGAGE Learning.
18. Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: CENGAGE Learning.
19. Swokowski, Eart W. (1987). *Introducción al Cálculo con geometría analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
20. Thompson, Silvanus P. *et al*. (2012). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw–Hill.
21. Warner, Stefan, *et al.* (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson.
22. Zill, Dennis G. *et al.* (2011). *Cálculo de una variable*. México: McGraw–Hill.

Se recomienda para profesores los libros: **(1), (4), (8), (13), (14)** y **(16).**

Se recomienda como referencia básica los libros: **(2), (3), (7), (9), (18)** y **(21).**

Referencias complementarias los libros: **(5), (6), (10), (11), (12), (15), (17) (19), (20) y (22).**

Versiones electrónicas:

Obras de consulta general:

<http://www.rua.unam.mx> (al 31 de mayo de 2016)

<https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus> (al 31 de mayo de 2016)

<http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_calculo.html> (al 31 de mayo de 2016)